2.2 Anordnungsaxiome und Archimedisches Axiom

<u>Def.</u>: Ein Körper $(K,+,\cdot)$ heißt <u>angeordnet</u>, falls eine Teilmenge $K^+ \subset K$ existiert mit

(A1) Für alle $x \in K$ gilt genau eine der Beziehungen

$$x \in K^+, \quad -x \in K^+ \quad \text{oder} \quad x = 0,$$

(A2) $x, y \in K^+ \Rightarrow x+y \in K^+$,

(A3) $x, y \in K^+ \Rightarrow xy \in K^+$.

<u>Bem.</u>: K^+ heißt die Menge der positiven Zahlen. (A2) und (A3) sagen aus, dass K^+ abgeschlossen ist unter $+$ und $\cdot$.

Durch die Existenz der Menge K^+ ist in natürlicher Weise eine Anordnung auf K gegeben:

<u>Def.</u>: ($<$- und $\leq$-Beziehung):

$$x < y \Leftrightarrow y > x \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in K^+$$

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y \geq x \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y$$

Wir verwenden auch die folgenden

<u>Bez.</u>: $$K_0^+ := \{x \in K : x \geq 0\} = K^+ \cup \{0\}$$

$$K^- := \{x \in K : x < 0\}$$

<u>Lemma 1</u>: Es sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper.

Dann gelten für $x, y, z, a, b \in K$:

1. $x < y \Leftrightarrow x+z < y+z$,
2. $x < y$ und $a < b \Rightarrow x+a < y+b$,
3. $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < y$ (Transitivität),
4. $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,
5. $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow ax > ay$,
6. $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$,
7. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ (insbes. $1 > 0$),
8. $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
9. $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

<u>Bew.</u>: 1. $x < y \underset{\text{p.d.}}{\Leftrightarrow} y - x \in K^+ \Leftrightarrow (y+z)-(x+z) \in K^+ \underset{\text{p.d.}}{\Leftrightarrow} x+z < y+z$.

2. $x < y$ und $a < b \underset{\text{p.d.}}{\Leftrightarrow} y-x \in K^+$ und $b-a \in K^+$

$\Rightarrow (y-x)+(b-a) \in K^+ \Leftrightarrow (y+b)-(x+a) \in K^+ \underset{\text{p.d.}}{\Leftrightarrow} x+a < y+b$.

3. Setze $a = y$, $b = z$ in 2. Dann haben wir $x+y < y+z \underset{1.}{\Rightarrow} x < z$.

4. N.V. ist $a > 0$ und $\overset{(\in K^+)}{y-x > 0} \underset{(A3)}{\Rightarrow} \overset{(\in K^+)}{a(y-x) > 0} \underset{(K9)}{\Rightarrow} \overset{(\in K^+)}{ay - ax > 0}$

$\underset{\text{p.d.}}{\Rightarrow} ax < ay$.

6. Wir haben $y \in K^+$ und $b \in K^+ \underset{(A3)}{\Rightarrow} yb \in K^+$. Im Fall $a = 0$ oder $x = 0$ folgt die Beh. Sind $x \in K^+$ und $a \in K^+$, gilt nach 4. $ax < ay$ und $ay < by$, nach 3. also $ax < by$.

7. $x \neq 0 \underset{(A1)}{\Rightarrow} x > 0$ oder $-x > 0$.
Im ersten Fall folgt aus 6. $x^2 = x \cdot x > 0$ (setze in 6. $a = x = 0$, $b = y = x$), im zweiten $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

5., 8., 9. in den Übungen.

Bem.:

(i) Der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der üblichen "$<$"-Relation ist angeordnet.

(ii) Die reellen Zahlen fassen wir auf als einen Körper, der allen Anordnungsaxiomen (A1) – (A3) genügt. (Wg. (i) ist dies für eine Charakterisierung noch nicht ausreichend.)

(iii) Es ist unmöglich, den Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so anzuordnen, daß (A1) – (A3) erfüllt sind. Denn es ist $i^2 = -1 < 0$, ein Widerspruch zu Eigenschaft 7.

Lemma 2 (Bernoullische Ungleichung): Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$ mit $x \geq -1$. Dann gilt für jede natürliche Zahl n:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Bew.: Induktion über n, für $n=1$ gilt "$=$".

$$n \to n+1: \quad (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}(1+x)^n \underset{\text{6. und I.V.}}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0, \text{ nach 7. und (A2)}} \underset{2.}{\geq} 1 + (n+1)x$$

$\square$

Bem.: Gilt mit $=$ auch für $n=0$.

In einem angeordneten Körper können wir definieren, was einseitig beschränkte und beschränkte Mengen sind.

Def.: Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

1. A heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $S \in K$ ex., so daß $x \leq S$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt S *eine obere Schranke* von A.
2. A heißt *nach unten beschränkt*, falls ein $s \in K$ ex., so daß $x \geq s$ für alle $x \in A$. s heißt dann *eine untere Schranke* von A.
3. A heißt *beschränkt*, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Eine Menge A ist in jedem Fall nach oben beschränkt, wenn sie ein größtes Element besitzt. Ein solches nennen wir das Maximum von A, Bez.: $\max A$. Entsprechend ist $\operatorname{Min} A$ das kleinste Element von A, also das Minimum von A. Solche Elemente existieren in der Regel *nicht*. Bsp.: $I = (0,1)$ besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum. Was das Intervall $(0,1)$ hingegen aufweisen kann, sind

- eine kleinste obere Schranke (nämlich 1) und
- eine größte untere Schranke (" 0).

Def.: Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

1. $S \in K$ heißt das <u>Supremum</u> von A (in Zeichen: $S = \sup A = \sup_{x \in A} x$), falls gilt

   (i) $S \geq x$ für alle $x \in A$ (d.h. S ist eine obere Schranke von A) und

   (ii) ist $\tilde{S} \geq x$ für alle $x \in A$, so ist $\tilde{S} \geq S$ (d.h. S ist die kleinste obere Schranke von A).

2. $s \in K$ heißt das <u>Infimum</u> von A (in Zeichen: $s = \inf A = \inf_{x \in A} x$), falls $-s = \sup(-A)$, dabei $-A = \{-x : x \in A\}$.

<u>Bem.</u>: (i) $\inf A$ ist die größte untere Schranke von A.

(ii) Falls existent, sind Supremum und Infimum eindeutig bestimmt.

(iii) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ weder ein Supremum noch ein Infimum (s.u.).

(iv) Besitzt eine Menge A ein Maximum (bzw. ein Minimum), so ist dies das Supremum (bzw. das Infimum) von A.

Ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, betrachtet als Teilmenge der angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ beschränkt? Für die rationalen Zahlen ist leicht einzusehen, daß dies nicht der Fall ist. Hier haben wir den Satz des Archimedes:

Satz 1: Zu $x, y \in \mathbb{Q}^+$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.

Bew.: $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p'}{q'}$, $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$nx > y \iff npq' > p'q.$$

Wähle $n = p'q + 1$ (geht, da $p'q \in \mathbb{N}$ und also einen Nachfolger hat) $\Rightarrow npq' \geq n > p'q$. $\square$

Wählen wir hierin $x = 1$, sehen wir: Zu jedem $y \in \mathbb{Q}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n > y$. Die Menge $\mathbb{N}$ besitzt also in $\mathbb{Q}$ keine obere Schranke.

Für die reellen Zahlen können wir diese Eigenschaft aus den bisher festgelegten Axiomen nicht folgern. Wir werden sie daher als ein weiteres Axiom der reellen Zahlen postulieren:

Def.: Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch angeordnet, wenn für ihn das archimedische Axiom

(A) $\forall x, y \in K^+ \; \exists n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$

gilt.

Bem.: Es gibt angeordnete Körper, in denen das Axiom (A) nicht gilt. Es ist daher unabhängig von (A1) bis (A3).

Um einige Folgerungen aus dem archimedischen Axiom zu ziehen, sei K ein archimedisch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. (Diese Folgerungen gelten also insbes. für $K=\mathbb{R}$.)

1. Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$, sodaß $k \leq x < k+1$. Dieses wird mit $[x]$ (= ganzzahliger Anteil, "Gaussklammer") bezeichnet.

Bew.: klar für $x=0$. Für $x>0$ existiert nach (A) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. Die Menge $\{k \in \mathbb{N} : x < k \leq n\}$ ist dann nichtleer und endlich, besitzt also ein Min.. Wir setzen

$$[x] = \min\{k \in \mathbb{N} : x < k \leq n\} - 1.$$

Dann ist $[x] \leq x < [x]+1$ (die geforderten Eigenschaften sind also erfüllt) und $x-1 < [x] \leq x$, also gibt es kein weiteres derartiges k. Für $x<0$ setzt man

$$[x] = -[-x]-1.$$

2. Zu jedem $\varepsilon \in K^+$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Bew.: Nach (A) ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Aufgrund der Folgerungen aus (A1)-(A3) gilt $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

3. Ist $x \in K$ mit $x < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq 0$.

(Klar, denn nach 2. ist $x \notin K^+$.)

Nützlich zu Beweiszwecken: Um $a \leq b$ zu zeigen, reicht der Beweis der etwas schwächeren Aussage:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ist $a \leq b + \frac{1}{n}$ bzw. $\forall \varepsilon \in K^+$ ist $a \leq b+\varepsilon$.

4. Ist $q>1$, so existiert zu jedem $R>0$ ein $n\in\mathbb{N}$ mit $q^n>R$.

Bew.: $q^n = (1+(q-1))^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+n\underbrace{(q-1)}_{>0}$

Nach (A) ex. $n\in\mathbb{N}$ mit $n(q-1)>R-1$. Hierfür ist dann auch $q^n>R$.

5. Ist $0<q<1$, so existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n\in\mathbb{N}$, so daß $0<q^n<\varepsilon$.

Bew. Nach 4. ex. $n\in\mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{q}\right)^n>\frac{1}{\varepsilon}$. Hierfür gilt dann auch $q^n<\varepsilon$.

Zum Ende dieses Abschnitts soll noch der Absolutbetrag eingeführt und erklärt werden, was wir unter Beschränktheit einer Menge komplexer Zahlen verstehen wollen: Zur Vorbereitung definieren wir

Def. (Quadratwurzel): Für $a\in\mathbb{R}^+$ verstehen wir unter $\sqrt{a}$ die positive Lösung x der Gleichg $x^2=a$. Ferner setzen wir $\sqrt{0}:=0$.

Bem.: (i) Existenz wird später gezeigt.

(ii) Es gilt $a<b \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$ und $a=b\Leftrightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}$.

Insbes. ist $\sqrt{a}$ eindeutig bestimmt.

Bew. von (ii) Es ist $0<b-a=(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\underbrace{\sqrt{b}+\sqrt{a}}_{>0})$

$\Leftrightarrow \sqrt{b}>\sqrt{a}$. (Genauso für $=$.)

Def. (Betrag einer komplexen Zahl): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

heißt $$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Betrag von z.

Bem.: Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist $|z| = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$

Lemma 3: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

Beachte: All diese Eigenschaften gelten auch für $z, w \in \mathbb{R}$!

1. $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$,
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$,
3. $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.
4. $|zw| = |z||w|$ und $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, falls $z \neq 0$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
6. $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$.

Bew.: 1. $|z| \geq 0$ unmittelbar aus der Def.

$$|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff z \cdot \bar{z} = 0 \iff z = 0 \vee \bar{z} = 0 \iff z = 0.$$

2. klar. ($(-y)^2 = y^2$) 3. $x^2 \leq x^2 + y^2 \underset{\text{Bem. (i) oben}}{\Rightarrow} |x| \leq |z|$. Ebenso: $|y| \leq |z|$.

4. $|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = z\bar{z}\,w\bar{w} = (|z|\,|w|)^2$.

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left|\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right|^2 = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2}$$

5. $$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \underset{3.,4.}{\leq} |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

$$\leq (|z| + |w|)^2$$

6. $|z| = |z - w + w| \underset{5.}{\leq} |z - w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w|$.

Ebenso: $|w| - |z| \leq |z - w| \Rightarrow \big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$. $\square$

Def.: $A \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{|z| : z \in A\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.