3. Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ komplexer Zahlen.

<u>Def.</u>: Die endlichen Summen $s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ werden als <u>Partialsummen</u> (der Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$) bezeichnet, die Folge $(s_n)_{n\geq n_0}$ heißt <u>Partialsummenfolge</u>.

<u>Def.</u>: Wenn die Folge $(s_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert, nennen wir

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

eine (unendliche) <u>Reihe</u>.

Sprechweise: Das Symbol $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ wird häufig als Synonym für die Partialsummenfolge verwendet. z.B. sagen wir daß $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert (oder divergiert), wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ existiert (bzw. nicht existiert).

<u>Bez.</u> für reelle Zahlenfolgen: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \pm\infty :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$.

<u>Bsp.</u>: 1. Eine "Teleskopreihe": $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

<u>Bew.</u>: $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \pm \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).$$

□

2. Die "harmonische Reihe": $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Bew.: Für $n = 2^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ haben wir

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=2^{N-1}+1}^{2^N} \frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{N}{2} \longrightarrow \infty \quad (N, n \to \infty)$$

Anzahl der Summanden × kleinster Summand.

Also: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. □

Unser nächstes Bsp. wird so oft verwendet, daß wir es als Satz formulieren:

Satz 1 (geometrische Reihe): Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Bew.: Nach der geometrischen Summenformel ist

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow[|z|<1]{} \frac{1}{1-z} \quad (n \to \infty).$$ □

Bsp. zu Satz 1:

1. Achill und die Schildkröte: Achill ist 10 mal so schnell wie die Schildkröte, diese hat 10 LE Vorsprung. Zenon behauptet, Achill könne die S. niemals einholen. Diese läuft jedoch nur

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \text{ LE},$$

bis Achill sie erreicht.

2. Ein periodischer Dezimalbruch

$$x = 0{,}3\overline{45} = \frac{p}{q} \text{ mit } p,q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.}$$

Aufg.: Bestimme p und q!

$$0{,}3\overline{45} = \frac{3}{10} + \frac{45}{1000} + \frac{45}{100000} + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \ldots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{45}{10^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{45}{10^3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{3}{10} + \frac{45}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{45}{10^3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{3}{10} + \frac{5}{110} = \frac{38}{110} = \frac{19}{55}.$$

3. geometrische Reihe für komplexes z mit $|z| < 1$, z.B.

$z = \frac{1+i}{2}$ mit $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Hierfür ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{2}} = \frac{2}{1-i} = 1+i.$$

Es gibt nur sehr wenige Reihen, die elementar berechenbar sind. Neben der geometrischen Reihe (und einigen daraus abgeleiteten) sind dies im wesentlichen die Teleskopreihen wie in Bsp. 1.

Leibniz hatte etwas großspurig behauptet, er könne jede Reihe ausrechnen, doch er scheiterte an

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?,$$

ebenso Jakob und Johann Bernoulli. Erst Euler gelang (1734 oder 1736) die Lösung: Es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{was ist } \pi\,?)$$

Häufig ist bereits die Frage nach der Konvergenz einer Reihe schwer zu beantworten. Daher hat man verschiedene Kriterien für die Reihenkonvergenz entwickelt.

3.1 Konvergenzkriterien für Reihen

Reihen sind per definitionem die Grenzwerte der Partialsummenfolgen, also können wir die Rechenregeln für Grenzwerte anwenden:

Satz 2: Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Beweis: Folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda r_n + \mu s_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} r_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ mit $r_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. $\square$

In ähnlicher Weise sieht man:

Satz 3: Es sei $c_n = a_n + i b_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ genau dann, wenn beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren.

(Der einfache Beweis sei zur Übung empfohlen.)

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergiert eine Folge komplexer Zahlen genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Wenden wir dies auf die Folge der Partialsummen an, erhalten wir

<u>Satz 4</u> (Cauchy-Kriterium für Reihen) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so daß } \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N.$$

<u>Bew.</u>: Ist $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die Partialsummenfolge, so ist $\sum_{k=m}^{n} a_k = S_n - S_{m-1}$. Die angegebene Bedingung ist also gleichbedeutend mit der Aussage, daß $(S_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. $\square$

Wählt man $m = n$ in Satz 4, so lautet das Cauchy-Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ so daß } |a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq N,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Damit ist ein <u>notwendiges</u> Kriterium für die Konvergenz einer Reihe gewonnen:

Folgerung: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bsp. u. Bem.: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergiert, da $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. (Hier irrte Leibniz, der behauptet hatte, daß $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$ sei!)

2. Die Folgerung aus Satz 4 liefert lediglich ein notwendiges, jedoch kein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Reihe, wie das Bsp. der harmonischen Reihe zeigt.

Es sind im wesentlichen zwei Eigenschaften, die die Konvergenz einer Reihe erzwingen können:

1. Die Folge (a_n) konvergiert 'schnell genug' gegen Null (z.B. $|a_n| \le \frac{c}{n^2}$ oder $|a_n| \le c\cdot q^n$, $q<1$), ⇝ wird später präzisiert;
2. endliche Abschnitte der Reihe löschen sich regelmäßig so stark aus, daß die Reihe konvergiert.

Der zweite Effekt ist subtiler, daher dazu ein

Bsp.: "alternierende harmonische Reihe": $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Fällt dem Betrag nach wie $\frac{1}{n}$ gegen Null, was für die Konvergenz nicht ausreicht, wie wir bei der harmonischen Reihe gesehen haben. Aber:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(2k-1)}}_{b_k}$$

(b_k) verhält sich im wesentlichen wie $\frac{1}{k^2}$, was die Konvergenz vermuten läßt. Das ist auch tatsächlich der Fall, wie das folgende Konvergenzkriterium zeigt:

<u>Satz 5</u> (verallgemeinertes Leibniz-Kriterium):
Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen und $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n =: a$$

und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| a - \sum_{n=1}^{m-1} a_n z^n \right| \leq \frac{2 a_m}{|z-1|}$$

<u>Bem.</u>: $z = -1$: Leibniz-Krit. Hier ist der Fehler gerade a_m.

Bew.: Betrachte

$$(z-1)\cdot\sum_{k=m}^{n} a_k z^k = \sum_{k=m}^{n} a_k\left(z^{k+1}-z^k\right)$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1} z^k - \sum_{k=m}^{n} a_k z^k$$

$$= a_n z^{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} (a_{k-1}-a_k) z^k \cancel{+} - a_m z^m$$

Δ-s Ungleichung und $|z|=1$!

$$\Rightarrow |z-1|\left|\sum_{k=m}^{n} a_k z^k\right| \le a_n + \sum_{k=m+1}^{n} (a_{k-1}-a_k) + a_m$$

$$= 2a_m$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k z^k\right| \le \frac{2a_m}{|z-1|} \longrightarrow 0 \quad (m\to\infty)$$

Das Cauchy-Kriterium ergibt jetzt die Konvergenz der Reihe. Die Fehlerabschätzung folgt aus

$$\left|a - \sum_{k=1}^{m-1} a_k z^k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k z^k\right| \le \frac{2a_m}{|z-1|}. \quad \square$$

Wir kommen jetzt zu weiteren Konvergenzkriterien für Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die lediglich von der Größe von $|a_n|$ abhängen. Dazu zunächst eine weitere Definition.

Def.: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bem.:

1. Absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz.

   Bew.: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent

   $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq N \ \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$

   $\Longrightarrow$ ———————— " ———————— $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

   (weil $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$ nach der Dreiecksungleichung)

   $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. $\square$

2. Die Umkehrung gilt nicht. Bsp. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ beschränkt ist.

   Denn (S_n) ist hier monoton steigend.

Die dritte Bem. liefert unmittelbar ein wichtiges Vergleichskriterium für absolute Konvergenz:

<u>Satz 6</u> (Majorantenkriterium) Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe und (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $|a_n| \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

<u>Bew.</u>: $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Also ist (S_n) beschränkt. $\square$

Bem.:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \geq 2$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn

$$\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

3. Satz 6 liefert zugleich ein Divergenzkriterium:

Sind (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent (andernfalls wäre ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$!)

4. Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \leq 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^r} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

5. Die Frage der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ für $r \in (1,2)$ wird später – ggf. in den Lösungen – diskutiert.

Als nächstes sollen zwei weitere Konvergenzkriterien für Reihen hergeleitet werden, für deren Beweis man die geometrische Reihe als Majorante benutzt:

Satz 7 (Quotientenkriterium) Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 .$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bew.: Wir wählen $q \in (0,1)$ so daß $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$.

Dann ist für ein hinreichend großes n_0 und $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$$

und daher

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdot \ \dots \ \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot |a_{n_0}| \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$$

$$\leq C \cdot q^n \text{ mit } C = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} .$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} C q^n$ eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. $\square$

Bem.: (1) Ein entsprechendes Divergenzkrit. lautet: Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \ \forall n \geq n_0$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. In diesem Fall ist nämlich (a_n) keine Nullfolge.

(2) Die Voraussetzung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \ \forall n \geq n_0$ ist nicht ausreichend für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Bsp.: $a_n = \frac{1}{n}$.

(3) Bsp.: $a_n = n^k z^n$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$, wobei $|z| < 1$.

$$\Rightarrow |a_{n+1}/a_n| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot |z| \longrightarrow |z| < 1 \quad (n \to \infty)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n \text{ konvergiert absolut.}$$

Ebenfalls auf der Majorisierung durch die geometrische Reihe beruht der folgende

Satz 8 (Wurzelkriterium): Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

1. Ist $L < 1$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut,
2. ist $L > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bew.: 1. $L < 1 \Rightarrow \exists\, q \in (L, 1),\ n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$. $\Rightarrow |a_n| \leq q^n \ \forall n \geq n_0$. Mit dem Majorantenkrit. folgt: $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Also konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

2. $L > 1 \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$

$\Rightarrow |a_{n_k}| > 1 \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ ist keine Nullfolge.

$\square$

Bem.: (1) Das Wurzelkriterium ist etwas schärfer als das Quotientenkriterium, wie das Bsp.:

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & \text{"} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$ zeigt.

Hierfür ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1)}}{3^{-n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

während $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$.

(2) Ähnlich wie beim Quotientenkriterium kann man für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ keine Aussage machen.

Bsp.: $a_n = \frac{1}{n}$ und $a_n = \frac{1}{n^2}$. In beiden Fällen ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Im ersten Fall divergiert, im zweiten Fall konvergiert die Reihe. Beide Kriterien sind also zu grob, um die Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} < \infty \,, \quad r \in \mathbb{Q} \cap (1,2) \quad ?$$

zu beantworten.

<u>Satz</u> 9 (Verdichtungssatz, Cauchy): Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu a_{2^\nu}$ konvergiert.

<u>Bew.</u>: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots$$

$$= a_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{*}{\geq} a_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu a_{2^{\nu+1}} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu a_{2^\nu} .$$

Andererseits:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{*}{\leq} a_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \cdot a_{2^\nu+1} \leq a_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \cdot a_{2^\nu}$$

Jetzt: Majorantenkriterium. □

(*) Hier geht die Monotonievoraussetzung ein.

Anwendung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \infty \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{1}{2^{jr}} < \infty$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r-1)}} < \infty \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{r-1})^j} < \infty .$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $r > 1$ gilt (geometrische Reihe, sonst: keine Nullfolge!).