## 3.3 Potenzreihen

**Def.:** Eine Reihe der Form $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ mit festem $a \in \mathbb{C}$ und einer Folge $(a_n)$ in $\mathbb{C}$ heißt eine Potenzreihe. Der Punkt $a$ ist der Entwicklungspunkt von $P$, die $a_n$ werden als Koeffizienten bezeichnet. Falls $a \in \mathbb{R}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nennt man $P$ eine reelle Potenzreihe.

**Bem.:** (1) Durch eine Potenzreihe wird eine Abbildung

$$P : \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \text{ konvergiert}\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z)$$

definiert.

(2) Ist $P(z)$ eine reelle Potenzreihe, so gilt $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbes. ist $P(x) \in \mathbb{R}$ für reelles $x$.

(3) Bsp.: $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (geometrische Reihe). Dies ist eine reelle Potenzreihe mit $a = 0$ und $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$; sie konvergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, der Definitionsbereich der Abbildg $P$ ist hier der Kreis mit Radius 1 um den Entwicklungspunkt $a = 0$ (Kreisrand ausgenommen!)

(4) Im folgenden (fast) immer: $a = 0$.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen wird charakterisiert durch den folgenden

Satz 1: Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und

$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gelten:

(1) Ist $L=0$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$

(2) Ist $0<L<\infty$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{L}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{L}$.

(3) Ist $L = \infty$, so konvergiert $P(z)$ nur für $z=0$.

Bew.: Es ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = L \cdot |z|$. Nach dem Wurzelkrit. konvergiert $P(z)$ absolut, falls $L|z| < 1$ ist. Dies zeigt Teil (1) und die erste Aussage in (2).

Ferner gilt – ebenfalls nach dem Wurzelkriterium – dass $P(z)$ divergiert, falls $L|z| > 1$ ist. Das liefert die 2. Aussage in (2) und die Divergenzaussage in (3).

Die Konvergenz in $z=0$ ist trivial, da die Reihe abbricht. $\square$

Die Konvergenzbereiche von Potenzreihen sind also Kreise in der komplexen Ebene, wobei wir die Ebene selbst als "unendlich großen" Kreis auffassen. Dies führt zu folgender Begriffsbildung:

Def.: Zu einer gegebenen Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nennen wir

$$R := \sup\{r \geq 0 : P(r) \text{ konvergiert}\} \in [0,\infty]$$

den Konvergenzradius von $P$ und $K_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ den Konvergenzkreis von $P$.

Satz 1 sagt dann aus: $P(z)$ konvergiert absolut im Innern des Konvergenzkreises und divergiert außerhalb. Den Konvergenzradius kann man berechnen nach der Formel von Cauchy-Hadamard:

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

(hierbei: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$.)

Über das Verhalten einer Potenzreihe am Rand des Konvergenzkreises ist keine allgemeine Aussage möglich. Dazu ein

Bsp.: (i) $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ : $R = 1$, Divergenz für $|z| = 1$.

(ii) $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ : auch hier ist $R = 1$, da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Divergenz für $z = 1$, Konvergenz für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$, nach dem verallg. Leibniz-Kriterium.

(iii) $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ : $R = 1$, da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ konvergiert die Reihe absolut.

In vielen Fällen läßt sich der Konvergenzradius einer Potenzreihe auch mit Hilfe des Quotientenkriteriums bestimmen:

Satz 2 (Eulersche Formel für den Konvergenzradius): Für den Konvergenzradius $R$ einer Potenzreihe
$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| ,$$

falls dieser limes (eigentlich oder uneigentlich) existiert.

Bew.: Ist $|z| < \cancel{R} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, so existiert auch

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |z| < 1 .$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert dann
$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut.

Für $|z| > \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ ist $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| > 1$.

Also ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

~~Nach~~ Also ist $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und somit $P(z)$ divergent. $\square$