4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Wir fassen zunächst nocheinmal die Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion zusammen:

Lemma 1: Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(2) exp ist stetig und streng monoton steigend,

(3) $\lim_{x\to\infty} x^{-p}\exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} x^p \exp(-x) = 0$ $(p \in \mathbb{N}_0)$,

(4) $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist bijektiv.

Bew.: (1) und (2) wurden bereits gezeigt.

(3) $x^{-p}\exp(x) \geq x^{-p}\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{x}{(p+1)!} \xrightarrow[(x\to\infty)]{} \infty$,

der zweite Grenzwert folgt jetzt aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. $\square$

(4) folgt aus (2), (3) und dem ZWS.

Satz 4 des vorigen Abschnitts ergibt die Existenz einer stetigen und streng monoton steigenden Umkehrfkt.:

Def.: Die Umkehrfunktion

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln(x)$$

der Exponentialfunktion wird als <u>natürlicher Logarithmus</u> (logarithmus naturalis) bezeichnet.

Lemma 2 (Eigenschaften des Logarithmus):

(1) Die Funktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ ist stetig, streng monoton steigend und bijektiv. Insbes. gelten: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.

(2) Es gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \forall\, x,y>0,$$

speziell: $\ln(1)=0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.

(3) Für jedes $p\in\mathbb{N}$ ist

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} y^{\frac{1}{p}}\cdot\ln(y) = 0, \qquad \lim_{y\to\infty} y^{-\frac{1}{p}}\cdot \ln(y) = 0.$$

Bew.: (1) folgt aus der Def. und aus Satz 4 des vorigen Abschnitts (auch die Grenzwerte).

(2) $\ln(x)+\ln(y) = \ln(\exp(\ln(x)+\ln(y)))$ (Def.)

Funktionalgleichung exp. $\overset{\text{}}{=} \ln(\exp(\ln(x))\cdot\exp(\ln(y))) = \ln(xy)$ (Def.)

(3) In Lemma 1, (3), zweiter Grenzwert, setzen wir $y = \exp(-x)$, so daß $y\to 0 \wedge y>0 \Longleftrightarrow x\to\infty$.

Dann folgt: $\lim\limits_{y\searrow 0} (-\ln(y))^p\cdot y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\searrow 0} y\cdot \ln(y)^p = 0$.

Da $\sqrt[p]{\ }$ stetig: $\lim\limits_{y\searrow 0} y^{\frac{1}{p}} \ln y = 0$ (1. Grenzwert).

Ersetzt man jetzt y durch $\frac{1}{y}$, folgt

$\lim\limits_{y\to\infty} -y^{\frac{-1}{p}}\ln(y) = 0$ (und damit der 2. Grenzwert).

$\square$

Mit Hilfe des Logarithmus können wir jetzt die allgemeine Exponentialfunktion definieren:

Def.: Für $a>0$ heißt die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto a^z := \exp(z \cdot \ln(a))$$

die <u>Exponentialfunktion zur Basis a.</u>

Diese Funktion ist stetig und es gelten die folgenden Rechenregeln:

<u>Lemma</u> 3: Seien $a,b>0$, $x \in \mathbb{R}$ und $z,w \in \mathbb{C}$. Dann ist

(1.) $a^{z+w} = a^z a^w$, (3.) $(a^x)^z = a^{xz}$,

(2.) $a^{-z} = \frac{1}{a^z} = \left(\frac{1}{a}\right)^z$, (4.) $(ab)^z = a^z b^z$.

Bew.: (1.) $a^{z+w} = \exp((z+w)\ln(a)) = \exp(z\ln(a))\exp(w\ln(a))$

$$= a^z a^w.$$

(2.) $a^{-z} = \exp(-z \cdot \ln(a)) = \begin{cases} \exp(z \cdot \ln(\frac{1}{a})) = (\frac{1}{a})^z \\ \dfrac{1}{\exp(z \cdot \ln(a))} = \dfrac{1}{a^z} \end{cases}$.

(3.) $(a^x)^z \underset{\text{Def.}}{=} \exp(z \cdot \ln(a^x)) \underset{\text{Def.}}{=} \exp(z \cdot \ln(\exp(x \cdot \ln(a))))$

Def. als Umkehrfkt. $= \exp(z \cdot x \cdot \ln(a)) = a^{xz}$.

(4.) $(ab)^z = \exp(z \cdot \ln(ab)) = \exp(z \cdot \ln(a) + z\ln(b))$

$$= \exp(z \cdot \ln(a)) \cdot \exp(z \cdot \ln(b)) = a^z \cdot b^z,$$

wobei zuerst die Funktionalgleichung des ln und anschließend die der e-Funktion verwendet wurde. □

Wir kommen nun zu den Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen:

<u>Satz</u> 1 (und <u>Def.</u>): Die Funktionen

$\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$, $\quad \tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\quad \cot: (0,\pi) \to \mathbb{R}$

sind streng monoton fallend (steigend, steigend, fallend), stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen

$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$ (Arcus Cosinus)

$\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Arcus Sinus)

$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (Arcus Tangens)

$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$ (Arcus Cotangens)

sind ebenfalls stetig, bijektiv und haben dasselbe Monotonieverhalten.

<u>Bew.</u>: (1) Zum Cosinus: Wissen bereits: cos ist stetig auf $\mathbb{R}$ und streng monoton fallend auf $[0,2]$.

$\cos(x) = -\cos(x+\pi) = -\cos(x-\pi) = -\cos(\pi - x)$

ergibt, das cos auch auf $[\pi-2, \pi]$ streng monoton fallend ist.

Ferner: $\cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$. Also: $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv. Stetigkeit der Umkehrfunktion folgt aus Satz 4 des letzten Abschnitts.

(2) $x \mapsto \cos(x+\frac{\pi}{2})$ ist nach (1) streng monoton fallend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Daher ist

$x \mapsto \sin(x) = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$ dort streng monoton steigend. Ferner ist $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 = -\sin(\frac{\pi}{2})$.

Jetzt reicht Satz 4.

(3) Zum Tangens: Für $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$ gelten

$0 \leq \sin(x) < \sin(y)$ und $\cos(x) > \cos(y) > 0$

$$\Rightarrow \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y),$$

d.h. tan auf $[0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend.

Aus $\tan(-x) = -\tan(x)$ ergibt sich die strenge Monotonie auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ferner: $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ stetig als Quotient zweier stetiger Funktionen und

$$\lim_{\substack{x \to \pm\frac{\pi}{2} \\ |x| < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = \pm\infty,$$

also surjektiv nach dem ZWS. Jetzt Satz 4 in A 4.2.

(4) Wird mit $\cot(x) = -\tan(x+\frac{\pi}{2})$ auf (3) zurückgeführt. $\square$

Den Arcus Cosinus können wir jetzt verwenden, um die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen zu beweisen:

Satz 2: Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Hierbei ist φ bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt.

Bew.: Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$ setzen wir $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$.

Dann folgt: $\varphi \in [0, \pi]$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{y}{r}$,

also $r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x + iy = z$.

Ist $z = x + iy$ mit $y < 0$, so gilt

$\bar{z} = r \cdot e^{i\tilde{\varphi}}$ mit $r^2 = x^2 + y^2$, $\tilde{\varphi} = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$.

Dann ist durch $z = \bar{\bar{z}} = \overline{re^{i\tilde{\varphi}}} = r \cdot e^{-i\tilde{\varphi}}$ die gewünschte Darstellung gegeben.

Eindeutigkeit: $e^{i\varphi} = e^{i\psi} \Rightarrow 1 = e^{i(\varphi - \psi)} = \cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)$

$\Rightarrow \varphi - \psi \in \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \Longrightarrow$ Beh. $\square$