5.3 Taylorsche Formel und Taylorreihe

Die Taylorsche Formel macht eine Aussage darüber, wie „glatte" Funktionen durch Polynome approximiert werden können. Zugleich liefert sie eine Vorschrift zur Berechnung der approximierenden Polynome.

Satz 1 (Taylor'sche Formel) Es seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n-mal stetig d'bar in $[a,b]$ und $(n+1)$-mal d'bar in (a,b), sowie $x, x_0 \in [a,b]$. Dann existiert $\xi \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0))$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Bem.: Für $n=0$ ergibt sich wieder der MWS.

Bew.: Wir wenden den allgemeinen Mittelwertsatz

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}$$

an mit $b=x$, $a=x_0$ und $F(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$.

Dann ist $F(b) = F(x) = f(x)$,

$$F(a) = F(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

und

$$F'(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k - \frac{f^{(k)}}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1} + f'(\xi)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

Es folgt

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{g(x)-g(x_0)}{g'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

Wir wählen $g(t) = (x-t)^{n+1} \Rightarrow g'(t) = -(n+1)(x-t)^n$

$$\Rightarrow \frac{g(x)-g(x_0)}{g'(\xi)} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}$$, so daß

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad \square$$

Bem.: (1) Oft wird die Taylorformel in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(\xi, x, x_0)$$

notiert mit einem Restglied $R_{n+1}(\xi, x, x_0)$.

Die gerade bewiesene Darstellung

$$R_{n+1}(\xi, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

wird als Lagrange-Form des Restglieds bezeichnet. Vorteil: (Relativ) leicht zu merken.

Andere Darstellungen erhält man zum Bsp. durch Wahl einer anderen Funktion g bei der Anwendung des GMWS im Beweis der Taylorformel.

Die Taylor'sche Formel ist nützlich zur Berechnung von Grenzwerten ($\to$ Übungen) und zur Herleitung weiterer Kriterien für Extrema, die im folgenden gezeigt werden sollen:

<u>Satz 2</u>: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal stetig d'bar. In $x_0\in(a,b)$ besitze f ein lokales Maximum (bzw. Minimum). Dann ist $f''(x_0)\le 0$ (≥ 0).

<u>Bew.</u> (für ein Maximum): Nach der Taylor-Formel ist für $x\in(a,b)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

mit einem ξ zwischen x und x_0. Da in x_0 ein lokales Max. vorliegt, gilt für x nahe bei x_0

$$0 \ge f(x)-f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

also $0\ge f''(\xi)$. Für $x\to x_0$ (und damit $\xi\to x_0$) erhalten wir aufgrund der Stetigkeit von f'', daß $f''(x_0)\le 0$. $\square$

<u>Bem.</u>: An der Stelle eines isolierten lokalen Maximums ist durch aus $f''(x_0)=0$ möglich.

<u>Bsp.</u> $f(x) = -x^4$, $x_0=0$.

Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema liefert schließlich der folgende

Satz 3: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig d'bar. In $x_0 \in (a,b)$ gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$). Dann besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. Minimum).

Bew.: (für's Maximum): Wir haben

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 \quad \text{(Taylor)}$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

Nun ist $f''(x_0) < 0$ und f'' stetig. Falls $|x-x_0|$ hinreichend klein ist, gilt also auch $f''(\xi) < 0$. Also ist in einer Umgebung von x_0

$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ also } f(x_0) > f(x). \quad \square$$

Bem.: Die Voraussetzung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$ ist nicht ausreichend, um auf ein lokales Maximum in x_0 zu schließen. Bsp.: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $f'(0) = f''(0) = 0$, aber kein Extremum.

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ unendlich oft d'bar, so können wir in der Taylorschen Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

den Grenzwert für $n \to \infty$ betrachten mit der Absicht, auf diese Weise eine Potenzreihendarstellung von f zu gewinnen. Dazu definieren wir zunächst nur formal die Taylorreihe von f.

<u>Def.</u> (Taylorreihe): Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$Tf(x, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)$$

die <u>Taylorreihe</u> von f mit <u>Entwicklungspunkt</u> x_0.

<u>Bem.</u> (1) Üblicherweise $x_0 = 0$.

(2) Konvergenz der Reihe außer in $x = x_0$ keineswegs gesichert. Es gibt ∞-oft d'bare Funktionen, deren Taylorreihen nur im Entwicklungspunkt konvergieren. Bsp.: Koballo Thm. 36.11 u. Bsp 36.12.

(3) Selbst wenn die Taylorreihe von f konvergiert, muß sie keineswegs gegen f konvergieren

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ Koballo: Bsp. 36.9.

Hierfür ist $f^{(n)}(0) = 0$, also $Tf(x,0) = 0$.
längere Rechnung!

(4) Aus der Taylorschen Formel ergibt sich

$$Tf(x,x_0) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(\xi,x,x_0) = 0$$

mit $R_{n+1}(\xi,x,x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

oder einer anderen Darstellung.

(5) Die Konvergenz von $Tf(x,x_0)$ gegen f ist äquivalent dazu, daß f eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ besitzt. Denn in diesem Fall ist $f^{(n)}(x_0) = n!\cdot a_n$, also $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

(6) Aus (5) ergeben sich unmittelbar eine Reihe von Bspen:

6.1 $\quad T\exp(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = \exp(x)$

Aus der Funktionalgleichung erhalten wir für einen beliebigen Entwicklungspunkt x_0:

$$T\exp(x,x_0) = \exp(x) = \exp(x-x_0+x_0)$$

$$= \exp(x_0)\cdot\exp(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

6.2 Die Taylorreihen der trigonometrischen Funktionen mit Entwicklungspunkt $x_0=0$ sind ebenfalls bereits bekannt. Wir haben

$$T\cos(x,0) = \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$ und

$$T\sin(x,0) = \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

Neu sind hingegen die Abschätzungen für die Reihenreste, die sich hieraus ergeben.

- $$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \underbrace{\frac{\cos(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}}_{R_{2n+2}(x,\xi,0)}$$

mit $|R_{2n+2}(x,\xi,0)| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

- $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+3}(x,\xi,0)$$

mit $|R_{2n+3}(x,\xi,0)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

6.3 Die Logarithmusreihe $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $|x| < 1$. Mit Hilfe der Taylor-Formel können wir einsehen, daß diese Reihe auch noch für $x = -1$ konvergiert.

Berechnung der Ableitungen:

$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}$,

allgemein: $f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

Damit lautet die Taylor-Formel

$$\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underbrace{- \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} x^{n+1}}_{R_{n+1}(x,\xi)}$$

Für $x = -1$ ist $\xi \in (-1, 0)$ und damit $\left| \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \right| \leq 1$,

so daß $R_{n+1}(-1, \xi) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Es folgt

$$\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0{,}693\,147\ldots$$