6.4 Elementare Integrationsmethoden

Aufgrund des Hauptsatzes liefert uns jede Ableitungsregel eine Regel bzw. eine Methode der Integration. Z.B. erhalten wir durch Integration der Produktregel:

Satz 1 (partielle Integration): Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig d'bar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

(Hierbei $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.)

Bew.: Aufgrund der Produktregel

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

haben wir

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b (f\cdot g)'(x)\,dx - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{=} f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \qquad \square$$

Bsp. (1) $\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x$

Mit diesem Ergebnis können wir das Argument wiederholen und erhalten

$$\int x^2\cdot e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x$$

Durch Iteration findet man heraus:

$$\int x^n e^x \, dx = e^x \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!} \, x^k$$

Dies läßt sich induktiv jetzt mit einer weiteren partiellen Integration beweisen:

$$n \to n+1: \quad \int x^{n+1} e^x \, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} x^{n+1} e^x - (n+1) \cdot \int x^n \cdot e^x \, dx$$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} x^{n+1} e^x - (n+1) \cdot e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \cdot x^k$$

$$= x^{n+1} \cdot e^x + e^x \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k!} \, x^k$$

$$= e^x \cdot \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot \frac{(n+1)!}{k!} \, x^k$$

Nimmt man die Linearität des Integrals hinzu, ist auf diese Weise für jedes Polynom $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ das Integral $\int P(x) e^x \, dx$ im Prinzip berechenbar. In ähnlicher Weise lassen sich auch die Integrale

$$\int P(x) \sin(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int P(x) \cos(x) \, dx$$

(P wie oben) behandeln. Wesentlich hierfür ist, daß man alle Stammfunktionen des zweiten Faktors kennt und dabei eine regelmäßige Wiederholung auftritt

(2) $$\int \sin^2(x)\,dx = \int \underset{f'}{\sin(x)} \cdot \underset{g}{\sin(x)}\,dx$$

$$= -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$

Pythagoras

$$= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \cos(x)\sin(x)\right)$$

By product: $$\int \cos^2(x)\,dx = x - \int \sin^2(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right)$$

Auch dieses Argument ist verallgemeinerbar!

Für $I_n(x) = \int \sin^n(x)\,dx$ haben wir

$$I_n(x) = \int \underset{f'}{\sin(x)} \cdot \underset{g}{\sin^{n-1}(x)}\,dx$$

$$= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x) + (n-1)\cdot\int \cos^2(x)\cdot\sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x) + (n-1)\cdot I_{n-2}(x) - (n-1)\,I_n(x)$$

Also: $$I_n(x) = \frac{1}{n}\left((n-1)\,I_{n-2}(x) - \cos(x)\sin^{n-1}(x)\right)$$

Da $I_0(x) = x$ und $I_1(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$ bekannt sind, läßt sich mit dieser Rekursionsformel im Prinzip $I_n(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen, und zwar ohne jegliche weitere Integration.

(3) $\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot \ln'(x)\,dx$

$= x\cdot\ln(x) - \int dx = x\cdot(\ln(x)-1)$ ©23

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Integrale

$$\int \arctan(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int \arcsin(x)\,dx$$

berechnen, was zur Übung empfohlen sei.

Satz 2 (Substitutionsregel): Es sei $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ stetig und $\varphi:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ stetig d'bar. Dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

Bew.: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt \overset{\text{Hauptsatz}}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\,dx \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx. \qquad \square$$

Bem.: Als unbestimmtes Integral: $\int f(t)\,dt\big|_{t=\varphi(x)}$

$= \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$

Bsp:

(1) $$\int_a^b f(cx+d)\,dx = \frac{1}{c}\int_a^b f(\underbrace{cx+d}_{\varphi(x)})\cdot \underbrace{c}_{\varphi'(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{c}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ca+d}^{cb+d} f(t)\,dt$$

Anders ausgedrückt: Ist $g(x) = f(cx+d)$ und F eine Stammfunktion von f, so ist $G(x) = \frac{1}{c}\cdot F(cx+d)$ eine Stammfunktion von g.

Konkretisierung: $\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}e^{cx}$; $\int \cos(cx)\,dx = \frac{1}{c}\sin(cx)$

$$\int a^x dx = \int \exp(x\cdot \ln(a))\,dx = \frac{1}{\ln(a)}\exp(x\cdot\ln(a)) = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

(hierbei $a>0$)

(2) $$\int_a^b \ln(x)\frac{dx}{x} = \int_a^b \ln(x)\cdot \ln'(x) = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(b)^2 - \ln(a)^2\right)$$

bzw. als unbestimmtes Integral: $\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

(3) $$\int_a^b \sin^n(x)\cos(x)\,dx = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\left(\sin(b)^{n+1} - \sin(a)^{n+1}\right)$$

bzw. $\int \sin^n(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x)$.

(4) das sog. logarithmische Integral: Falls $\varphi(x) \neq 0 \;\forall x\in[a,b]$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dt}{t} = \ln(|\varphi(b)|) - \ln(|\varphi(a)|)$$

$$= \ln\left(\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right|\right)$$ bzw.: $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln(|\varphi(x)|)$

konkret: $\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(|\cos(x)|)$

(5) Kreisfläche (Radius 1):

$$F = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cdot \cos(x)\, dx \qquad \varphi(x) = \sin(x)$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx$$

Nun ist $\int \cos^2(x)\, dx = \int \underset{f}{\cos(x)}\,\underset{g'}{\cos(x)}\, dx = \cos(x)\sin(x)$

$$+ \int \sin^2(x)\, dx = \cos(x)\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\, dx \quad \text{(part. Int.)}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad F = \pi$$

Da wir π definiert haben, indem wir die kleinste positive Nullstelle von cos $\frac{\pi}{2}$ genannt haben, ist dies tatsächlich nicht trivial.