6.5 Das uneigentliche Riemann-Integral

Bisher: Beschränkte Funktionen auf kompakten Integrationsbereich $[a,b]$

Jetzt: Unbeschränkte Funktionen auf beschränktem Integrationsgebiet

und: Hinreichend schnell fallende Funktionen auf unbeschränktem Integrationsintervall

Def. (uneigentliches Riemann-Integral):

(1) Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,\beta] \subset [a,b)$ integrierbar. Dann heißt f auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\beta \to b \\ a < \beta < b}} \int_a^\beta f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

(in $\mathbb{R}$) existiert.

(2) Es sei $-\infty \leq a < b < \infty$ und $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[\alpha,b] \subset (a,b]$ integrierbar. Dann heißt f auf $(a,b]$ uneigentlich integrierbar, wenn

$$\lim_{\substack{\alpha \to a \\ a < \alpha < b}} \int_\alpha^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

(in $\mathbb{R}$) existiert.

(3) Sei $-\infty \le a < b \le \infty$. Dann heißt $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, falls ein $c\in(a,b)$ existiert, so daß f auf $(a,c]$ und auf $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bsp.:

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ existiert genau dann, wenn $s>1$ ist.

Bew.: Für $s\neq 1$ ist

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\, x^{1-s}\Big|_1^\beta = \frac{1}{1-s}\left(\beta^{1-s}-1\right),$$

also

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{1-s}\left(\beta^{1-s}-1\right) = \begin{cases}\infty, & \text{für } s<1\\ \frac{1}{s-1} & \text{für } s>1.\end{cases}$$

Für $s=1$ haben wir

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x} = \ln(\beta) \to \infty \quad (\beta\to\infty),$$ also existiert auch

dieses uneigentliche Integral nicht. $\square$

Dieselbe Familie von Funktionen soll jetzt auf dem Intervall $(0,1]$ untersucht werden.

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ existiert genau dann, wenn $s<1$ ist.

Bew.: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s})$ $(\varepsilon>0)$

Für $s \neq 1$:

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s}) = \begin{cases} \infty & \text{für } s>1 \\ \frac{1}{1-s} & \text{für } s<1 \end{cases}$$

Für $s=1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln(1)-\ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} \infty$. $\square$

Weitere Beispiele ggf. im Tutorium.

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz (oder Konvergenz) eines uneigentlichen Integrals liefert der

Satz 1 (Majorantenkriterium) Es sei $-\infty<a<b\leq\infty$ und $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion, so daß gilt:

(i) f ist auf $[a,\beta]$ integrierbar für jedes $\beta\in(a,b)$,

(ii) es existiert eine uneigentlich integrierbare Funktion $g:[a,b)\to\mathbb{R}$, so daß $|f|\leq g$.

Dann ist auch f auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar.

Bew.: Nach (i) ist $I_n := \int_a^{\beta_n} f(x)\,dx$ wohldefiniert für jedes $\beta_n\in[a,b)$. Gilt $\lim_{n\to\infty}\beta_n = b$, so erhalten wir:

$$|I_n - I_m| = \left|\int_{\beta_m}^{\beta_n} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\beta_m}^{\beta_n} g(x)\,dx \longrightarrow 0 \quad (n,m\to\infty)$$

Also ist $(I_n)_n$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen und somit konvergent. $\square$

Das Majorantenkriterium ist ein hinreichendes, aber keineswegs notwendiges Kriterium, wie das folgende Bsp. zeigt:

Bsp. 1 $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existiert, hingegen existiert $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$ nicht.

Beweis: $$\int\limits_{\pi}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_{\pi}^{R} - \int\limits_{\pi}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{\cos(R)}{R} - \int\limits_{\pi}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$ Dabei ist

$\lim\limits_{R\to\infty} \frac{\cos(R)}{R} = 0$ und auch der Grenzwert

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\pi}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ existiert nach Satz 1, denn

$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, vgl. Bsp. (1).

Hingegen ist $$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \int\limits_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\pi(k+1)} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty \quad (N\to\infty).$$

Damit ist auch die zweite Aussage gezeigt.

Satz 2 (Integralvergleichskriterium für Reihen):

Es sei $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ existiert.}$$

Bew.: Zur Anwendung des Majorantenkriteriums definieren wir die Funktionen

$$g(x) := f(k) \quad \text{für} \quad x \in [k-1,k)\,, \quad k = 2,3,\dots \quad \text{und}$$

$$h(x) := f(k-1) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad , \quad \text{—"—}.$$

Dann ist $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und wir haben

$$\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} g(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$$

sowie

$$\int_1^{\infty} h(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} h(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} f(k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Das bedeutet: $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\Rightarrow \int_1^{\infty} h(x)\,dx$ existiert $\underset{M.}{\Rightarrow} \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ existiert $\underset{M}{\Rightarrow} \int_1^{\infty} g(x)\,dx$ ex.

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert.} \qquad \square$$

Anwendung: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^s} < \infty \iff s > 1$, denn

$$\int_2^R \frac{dx}{x \cdot \ln(x)^s} = \int_{2}^{R} \frac{1}{y^s(x)} \cdot y'(x)\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(R)} y^{-s}\,dy.$$

$y = \ln(x)$

Jetzt Bsp. 1 und Satz 2!

Integrale, insbesondere auch uneigentliche Integrale, die von einem Parameter abhängen, werden häufig zur Definition nicht-elementarer Funktionen herangezogen. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Gamma-Funktion, die die Fakultät für reelle Argumente verallgemeinert:

Def.: Die Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, def. durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

heißt Γ-Funktion.

Bem.: Für jedes $x > 0$ konvergiert das obige Integral, also ist $\Gamma(x)$ wohldefiniert. Bew. der Existenz des uneigentlichen Integrals mit Hilfe des Majorantenkriteriums: Wir haben

$$\Gamma(x) \le \underbrace{\int_0^1 t^{x-1}\, dt}_{=: I_1} + \underbrace{\int_1^\infty (t^{x-1} \cdot e^{-t/2}) \cdot e^{-t/2}\, dt}_{=: I_2}$$

mit $I_1 = \frac{1}{x} t^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x}$ (hier geht die Voraussetzung $x > 0$ ein).

Für I_2 beachten wir, dass $\lim\limits_{t\to\infty} t^{x-1} e^{-t/2} = 0$. Insbesondere ist dieser Ausdruck (bei festem x!) beschränkt, d.h. es gibt ein $C_x > 0$, so dass $t^{x-1} e^{-t/2} \le C_x \quad \forall\, t \ge 1$ und daher

$$I_2 \le C_x \cdot \int_1^\infty e^{-t/2}\,dt = C_x \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Satz 2: Für alle $x > 0$ gilt $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$

Bew.: Sei $0 < \varepsilon << R < \infty$. Dann ergibt partielle Integration

$$\int_\varepsilon^R \underset{u}{t^x} \cdot \underset{v'}{e^{-t}}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$ verschwindet $t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R$ und wir erhalten wie gewünscht

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Für $x = 1$ haben wir $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$. Das ist der Induktionsanfang für die zweite Aussage. Der Induktionsschritt ergibt sich durch Anwendung der bereits hergeleiteten Identität mit $x = n+1$. Demnach ist

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\,\Gamma(n+1) \underset{\text{I.V.}}{=} (n+1)\,n! = (n+1)! \qquad \square$$

Die Γ-Funktion hat eine Vielzahl von Anwendungen, z.B. tritt sie bei der Berechnung des Volumens und der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel auf. In der W.-theorie und Statistik tritt sie häufig auf, weil sie eng mit der Gaussschen Glockenfunktion verknüpft ist.

Dieser Zusammenhang läßt sich mit einer naheliegenden Substitution einfach herleiten. Im Integral 6.33

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx =: I$$

substituieren wir $t = x^2$, also $\frac{dt}{dx} = 2x = 2\sqrt{t}$. Das gibt

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

und aus Symmetriegründen ergibt sich

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Schwieriger einzusehen ist die Identität $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (↗ Ana III)

Eine weitere wichtige Funktion, die ebenfalls durch ein parameterabhängiges Integral definiert wird, ist die (Eulersche) Betafunktion. Damit werden wir uns in den Übungen ein wenig vertraut machen.