

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

5. Beweisen Sie die nachstehenden Teilbarkeitsaussagen:

- (a)  $2^{3n} - 1$  ist teilbar durch 7 für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $3^{2n+1} + 1$  ist teilbar durch 4 für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

- (a)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ,
- (b)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ .

Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

7. Man berechne  $1 + 3$ ,  $1 + 3 + 5$  und  $1 + 3 + 5 + 7$ , leite eine allgemeine Formel für

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

her und beweise diese durch Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ .

8. Für natürliche Zahlen  $n$  und  $p$  sei  $s_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$ . Durch Aufspalten von  $s_{2n}(p)$  in Beiträge von geraden und ungeraden Indizes zeige man die Identität

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^p = s_{2n}(p) - 2^p s_n(p).$$

Was ergibt sich hieraus für  $p \in \{2, 3\}$ , wenn Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 6 verwenden?

**Abgabe:** Do., 30.04.2015, 10.25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 06.05.2015 und Do., 07.05.2015