Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
08.05.2015
Blatt 4

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

**13.** Für welche $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

$$3^{(2^n)} < 2^{(3^n)} \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{k=1}^{n} k^k < n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese!

**14.** Rekapitulieren Sie die Anordnungsaxiome (A1) – (A3) und die damit zusammenhängenden Begriffe und Bezeichnungen (kurze Zusammenfassung, ca. $\frac{1}{4}$ Seite). Beweisen Sie die Folgerungen 5., 8. und 9. aus diesen Axiomen, das sind:

(a) $x < y$ und $a < 0$ implizieren $ax > ay$,

(b) aus $x > 0$ folgt $\frac{1}{x} > 0$,

(c) $0 < x < y$ impliziert $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Hierbei können Sie alle jeweils vorangehenden Folgerungen aus den Axiomen benutzen. Machen Sie in jedem Schritt kenntlich, welches Axiom bzw. welche Folgerung Sie verwenden.

**15.** Zeigen Sie die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Für $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

**16.** Zeigen Sie:

(a) Für jedes $c \in \mathbb{C}^*$ besitzt die Gleichung $z^2 = c$ (in $\mathbb{C}$) genau zwei Lösungen.

(b) Jede quadratische Gleichung

$$w^2 + \lambda w + \mu = 0$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ besitzt die Lösungen $w_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}$, wobei $\pm\sqrt{c}$ die Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ aus Teil (a) bezeichnet.

**Abgabe:** Fr., 15.05.2015, 10.25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 20.05.2014 und Do., 21.05.2014