Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
26.06.2015
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

37. Es seien $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Exponentialfunktion, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ und $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$. Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$, so ist $\exp(x) > 1$,

(b) ist $x \in \mathbb{R}$ und $x < 0$, so ist $0 < \exp(x) < 1$,

(c) ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $|\exp(ix)| = 1$,

(d) ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(z) = 0$ oder $\cos(z) = 0$, so ist z reell.

38. Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die Identitäten

(a) $\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\,\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$,

(b) $\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\,\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Hinweis: $z = \frac{z+w}{2} + \frac{z-w}{2}, \quad w = \frac{z+w}{2} - \frac{z-w}{2}$.

39.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a_\pm \in \mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

40. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

(a) Jedes Polynom der Gestalt

$$P(x) = x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat eine reelle Nullstelle, wenn n ungerade ist.

(b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen *Fixpunkt* (d. i. eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$).

Abgabe: Fr., 03.07.2015, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 08.07.2015 und Do., 09.07.2015