Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind beide archimedisch angeordnet. Zu einer Charakterisierung der reellen Zahlen fehlt uns noch ein letztes Axiom, das die reellen von den rationalen Zahlen unterscheidet. Die entscheidende Eigenschaft, in der sich $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ unterscheiden ist die Vollständigkeit, für die es in $\mathbb{R}$ verschiedene äquivalente Formulierungen gibt.

Es ist sinnvoll den Begriff der Vollständigkeit zu definieren, ohne dabei auf die Anordnung der reellen Zahlen zurückzugreifen. Zu diesem Zweck müssen wir etwas mehr wissen über Folgen und Grenzwerte!

Exkurs: Folgen und Grenzwerte

Def (Folge): M sei eine Menge. Eine Abbildung

$$f: \mathbb{N} \to M, \quad n \mapsto a_n$$

heißt eine Folge mit Werten in M.

Schreibweise: $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $f = (a_n)$,

mitunter auch aufzählend: $f = (a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Bem: Auch Abbildungen $f: \mathbb{Z} \to M$ oder $f: \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\} \to M$ werden als Folgen bezeichnet, in diesem Fall schreibt man $f = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bzw. $f = (a_n)_{n \geq n_0}$.

Bsp.:

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolge, entspr. f. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$)

   1.1 $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

   1.2 $a_n = \frac{1}{n}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

   1.3 $a_n = b^n$ mit $b \in \mathbb{C}$ fest (geometrische Folge)

   1.4 $a_n = n!$, also $(a_n) = (1, 2, 6, 24, 120, \dots)$

   1.5 rekursiv definierte Zahlenfolgen wie z.B. die Fibonacci-Zahlen $(f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$

2. Mengenfolgen.
   In der Analysis I: • Folgen $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen,
   • Kreisflächenberechnung durch Ausschöpfung mit regulären 2^n-Ecken (Archimedes).

3. Folgen von Abbildungen, sog. "Funktionenfolgen"

   Bsp. $f_n(x) = x^n$

Für Folgen komplexer Zahlen definieren wir den Begriff des Grenzwerts folgendermaßen:

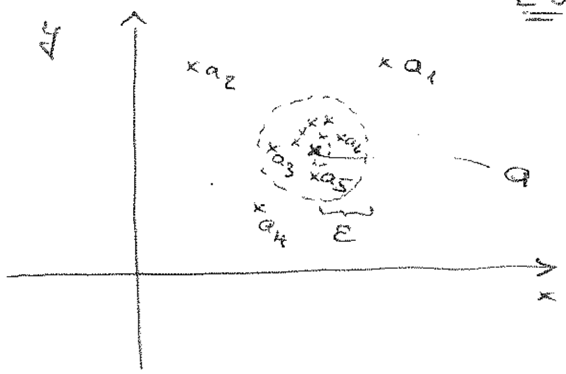
<u>Def.</u>: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt <u>konvergent</u> gegen $a \in \mathbb{C}$, falls gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ ex. $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodaß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$

Die Zahl a heißt der <u>Grenzwert</u> (oder <u>Limes</u>) der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

<u>Schreibweise</u>: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

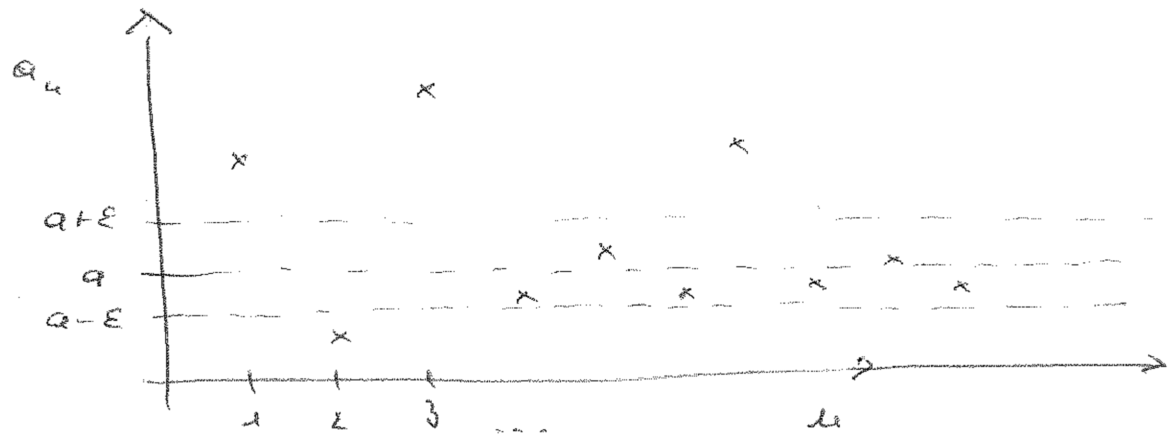
Veranschaulichung (2 Versuche):



(i) komplexe Zahlenfolge:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: Alle außer endlich vielen Folgenglieder liegen innerhalb des Kreises vom Radius ε um a.

(ii) reelle Zahlenfolge: Hier kann man den Graphen zur Veranschaulichung heranziehen:



Def. sagt aus: Legt man für ein beliebig kleines, positives ε einen Streifen der Breite 2ε um a, so befinden sich fast alle (= alle bis auf endlich viele) innerhalb dieses Streifens.

Weitere Bez. in diesem Zusammenhang:

- Wir nennen eine Folge konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls divergent.
- Eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt eine Nullfolge.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

27.04.12

Lemma 1: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gelten:

(i) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Bew.: Zu (i): Wir nehmen an, es gebe 2 Grenzwerte a und a'. Ist dann $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so finden wir $N_1 = N_1(\varepsilon)$ und $N_2 = N_2(\varepsilon)$, so daß

für alle $n \geq N_1$ gilt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und

" " $n \geq N_2$ " $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ ergibt sich damit

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $|a - a'| = 0$, also $a = a'$.

Zu (ii): Wir wählen N so groß, daß $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann ist

$$|a_n| \leq \max_{k=1}^{N} |a_k| \quad , \text{ falls } n \leq N \text{ und}$$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|, \text{ falls } n \geq N$$

Für $C := \max\{|a|+1, |a_1|, \dots, |a_N|\}$ ergibt sich

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Def. (Teilfolge): Es sei (a_n) eine Folge und

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

eine Teilfolge von (a_n).

Lemma 2: Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Dann gelten:

(i) (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Bew.: (i) $|a_n| \le c \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow |a_{n_k}| \le c \quad \forall k\in\mathbb{N}$

(ii) $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \forall k \ge N(\varepsilon)$, da $n_k \ge k$. $\square$

Def. (Häufungswert): Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. $a \in \mathbb{C}$ heißt ein Häufungswert von (a_n), falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n) existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Lemma 3: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist $a \in \mathbb{C}$ ~~EE~~ genau dann ein Häufungswert von (a_n), wenn in jeder ε-Umgebung

$$U_\varepsilon(a) := \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon \}$$

unendlich viele Folgenglieder von (a_n) liegen.

Bew.: "$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ex. $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \forall\, k \geq K$. Also ist

$$\{ a_{n_k} : k \geq K \} \subset U_\varepsilon(a).$$

"$\Leftarrow$" Zu $\varepsilon = 1$ ex $a_{n_1} \in U_1(a)$. Nun seien $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ bereits gewählt mit $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ und $a_{n_j} \in U_{\frac{1}{j}}(a)$ für $1 \leq j \leq k$.

Dann existiert $n^* > n_k$ mit $|a_{n^*} - a| < \frac{1}{k+1}$, also $a_{n^*} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$. Wir setzen $n^* = n_{k+1}$.

Die auf diese Weise rekursiv definierte Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

Bsp.:

1. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierfür gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist $|a_n - a| = 0 < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $a_n = \frac{1}{n}$: (a_n) bildet eine Nullfolge, denn für $n \geq N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ist $|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

   (vgl. Folgerungen 1. und 2. aus (A))

3. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$: desgl. mit $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

4. Sei $q > 0$ und $a_n = (-q)^n$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden

   4.1 $q < 1$: Hier ist $|a_n - 0| = q^n < \varepsilon$ für n hinreichend groß, also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (vgl. Folgerung 5 aus (A)!)

   4.2 $q = 1$ Hier zerfällt a_n in zwei konstante und also konvergente Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $a_{2k} = 1 = -a_{2k-1}$.

   4.3 $q > 1$. In diesem Fall wissen wir: Zu jedem $R > 0$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| = q^n > R$. (vgl. Folgerung 4 aus (A)). Die Folge ist also unbeschränkt, ebenso jede Teilfolge. Es existiert also kein Häufungswert, insbes.: (a_n) divergiert.

5. $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right)$

   Jedes $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ wird unendlich oft angenommen, ist also HW. Es gilt sogar: Jedes $x \in [0,1]$ ist ein HW dieser Folge. Bew. folgt später.

Im folgenden sollen einige Rechenregeln für Grenzwerte bewiesen werden. Nützlich hierfür ist das folgende

Kriterium: Es sei (c_n) eine Folge komplexer Zahlen und $c \in \mathbb{C}$. Ferner gebe es $A, B \geq 0$ und Nullfolgen (a_n) und (b_n) nichtnegativer reeller Zahlen, so daß

$$|c_n - c| \leq A \cdot a_n + B\, b_n .$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Bew.: Zu $\varepsilon > 0$ ex. nach Vor. $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$, so daß $a_n < \frac{\varepsilon}{2A}$ für alle $n \geq N_1(\varepsilon)$ und $b_n < \frac{\varepsilon}{2B}$ für alle $n \geq N_2(\varepsilon)$. Für $n \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ ist dann $|c_n - c| \leq A \cdot a_n + B\, b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Satz 1: Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a \cdot b$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
4. $\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$,
5. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Bem. Die Aussage des Satzes umfaßt die Existenz der Grenzwerte auf der linken Seite.

Bew. 1. $|a_n + b_n - (a+b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|$

aufgrund der Δ's-Ungleichung. Jetzt: Kriterium.

2. $$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)|$$

$$\le |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b|$$

Nun ist die konvergente Folge (b_n) beschränkt, also ex. $S > 0$ mit $|b_n| \le S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|a_n b_n - ab| \le S|a_n - a| + |a|\,|b_n - b|$$

Wieder liefert das Krit. die Behauptung.

3. Wir betrachten zunächst den Fall $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $b, b_n \neq 0$ vorausgesetzt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|b_n| \ge \varepsilon$ und $|b| \ge \varepsilon$. Damit erhalten wir

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b_n b|}\,|b_n - b| \le \frac{1}{\varepsilon^2}|b_n - b|$$

Aufgrund des Kriteriums also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Mit Teil 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b}$.

4. Folgt mit dem Krit. aus $|a_n - a| = |\overline{a_n} - \overline{a}|$.

5. " " " " aus $||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$

(Folgerung aus der Δ's-Ungleichung). $\square$

Folgerungen und Anwendungen:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (Regeln 2 und 1)

In der Sprache der linearen Algebra bedeutet dies:
Ist C der Vektorraum der konvergenten Folgen, so ist die Abb. $\lim : C \to \mathbb{C}$, $(a_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eine lineare Abbildung.

2. Bsp. Wissen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \underset{R.2}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0$

allgemeiner: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

3. Bsp. $a_n = \dfrac{3n^2 + 7n}{n^2 - 2} = \dfrac{3 + 7/n}{1 - 2/n^2}$

$$\underset{R.1, R.3 \text{ u. } 2.}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

4. Ist P ein Polynom, also $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \lambda_k x^k$ und (a_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Regeln 1. und 2., daß $\lim\limits_{n\to\infty} P(a_n) = P(a)$.

5. Ist $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit Polynomen P und Q, N die Nullstellenmenge von Q und (a_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n, a \notin N$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R(a_n) = R(a)$.

6. Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen und $c_n = a_n + ib_n$ sowie $c = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ \underline{und} } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Bew.: „$\Rightarrow$" $\lim_{n\to\infty} c_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{c_n} = \overline{c}$ (R 4)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(c_n + \overline{c_n})$$

$$\underset{1.}{=} \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} \overline{c_n}\right) = \frac{1}{2}(c + \overline{c}) = a$$

ebenso: $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2i}(c - \overline{c}) = b$

„$\Leftarrow$" $c = a + ib = \lim_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n + ib_n = \lim_{n\to\infty} c_n. \quad \square$$

Das bedeutet: Grenzwertbeweise für komplexe Zahlenfolgen können durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil reduziert werden auf solche für reelle Zahlenfolgen. Vorteil: Man kann sich für reelle Folgen die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ zunutze machen.

Lemma 4: (a_n) und (b_n) seien reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \le b_n$ für alle $n \ge n_0$.

Dann folgt $a \le b$.

Bew.: Ann. $a > b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existieren $N_{1,2}(\varepsilon)$ mit

$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_1(\varepsilon)$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_2(\varepsilon)$

Für $n \ge \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ erhalten wir

$$a_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon > b_n$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_n \le b_n$. $\square$

Bem.: Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n < b_n$ folgt im allg. nicht, daß $a < b$. Bsp.: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Der nächste Satz liefert ein nützliches Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen:

<u>Satz 2</u> (Einschließungssatz / Sandwich-Thm.): Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Zahlenfolgen mit $a_n \le c_n \le b_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Dann konvergiert auch (c_n) und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Bew. Zu $\varepsilon > 0$ ex. $N_{1,2}(\varepsilon)$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_1(\varepsilon), \ |b_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_2(\varepsilon).$$

Für $n \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ haben wir dann

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon, \text{ also } |c_n - a| < \varepsilon \qquad \square$$

Bsp.:

1. $a_n = 0$, $c_n = \frac{n!}{n^n}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Dann ist

$$0 = a_n \leq c_n = \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{n}{n} \, \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} = b_n,$$

also nach Satz 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Dieses Ergebnis folgt nicht aus den Rechenregeln für Grenzwerte, da die Zahl der Faktoren gerade gleich n ist.

2. Sei $0 \leq q < 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \cdot n^k = 0$

Bew.: Ind. über k, beginnend mit

$k = 1$: Wir zeigen zunächst, daß $q^n \cdot n$ beschränkt ist.

Dazu benutzen wir die Variante

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

der Bernoulli-Ungleichung aus den Übungen und zwar mit $x = 1-q$:

$$q^n \cdot n = (1-(1-q))^n \cdot n \leq \frac{n}{1+n(1-q)} \leq \frac{1}{1-q}.$$

Hieraus folgt

$$q^n \cdot n = \sqrt{q}^{\,n} \cdot \sqrt{q}^{\,n} \cdot n \leq \sqrt{q}^{\,n} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{q}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

Nach dem Sandwich-Thm. also auch

$$\lim_{n\to\infty} q^n \cdot n = 0.$$

Ind. Schluß: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \cdot n^{k+1} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{q}^{\,n} \cdot n^k}_{=0} \cdot \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{q}^{\,n} \cdot n}_{=0}$

$= 0$ nach Rechenregel 2 für Grenzwerte.

Bem.: Die Aussage für $k=0$ ist zwar schon bekannt, hätte in diesem Fall aber für den Induktionsschluß nicht ausgereicht, weil dieser explicit von der Aussage für $k=1$ Gebrauch macht.

Zum Abschluß dieses Exkurses über ~~reelle~~ Folgen und Grenzwerte sollen einige weitere Eigenschaften reeller Zahlenfolgen eingeführt werden:

Def.: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

1. nach oben (unten) beschränkt, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist;
2. (streng) monoton steigend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$);
3. (streng) monoton fallend, falls $(-a_n)$ (streng) monoton steigend ist,
4. uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ $(-\infty)$, wenn gilt: $\forall R \in \mathbb{R}\ \exists N = N(R)$, so daß $a_n > R\ \forall n \geq N$. (bzw $a_n < -R\ \forall n \geq N$) Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\ (-\infty)$.