2.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Def.: Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt eine Cauchy-Folge, falls gilt

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$, $\quad |a_n - a_m| \to 0 \ (n, m \to \infty)$.

Satz 1: Jede konvergente Folge (a_n) komplexer Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Bew.: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Sind dann n und $m \geq N$, folgt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Das Vollständigkeitsaxiom für die reellen Zahlen besagt gerade, daß in $\mathbb{R}$ auch die Umkehrung gilt:

(V) Jede Cauchy-Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

Bem.: Mit dem Vollständigkeitsaxiom ist die axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen abgeschlossen. Wir fassen also im folgenden $\mathbb{R}$ auf als einen vollständigen, archimedisch angeordneten Körper, in dem die natürlichen Zahlen (und damit auch $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) eingebettet sind.

Durch die damit geforderten Axiome

(V) – Vollständigkeit

(A) – Archimedes

(A1)-(A3) – Anordnung

(K1)-(K9) – Körper

sind die reellen Zahlen "bis auf Isomorphie" eindeutig bestimmt – insofern haben wir die reellen Zahlen tatsächlich charakterisiert. Einen Beweis der Eindeutigkeitsaussage finden Sie in

Ebbinghaus u.a.: Zahlen. Kap. 2, § 5

"Eindeutig bis auf Isomorphie" bedeutet in diesem Zusammenhang: Ist K ein weiterer Körper, in dem alle o.g. Axiome gelten, so existiert eine Bijektion $\varphi: K \to \mathbb{R}$ mit

- $\varphi(0_K) = 0$, $\varphi(1_K) = 1$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
- $a < b \iff \varphi(a) < \varphi(b)$
- (a_n) konvergent bzw. Cauchy $\iff (\varphi(a_n))$ konv. bzw. Cauchy

Im Rest dieses Abschnitts werden wir eine Reihe wichtiger Eigenschaften der reellen Zahlen aus dem Vollständigkeitsaxiom und den vorangegangenen Axiomen herleiten. Zunächst wollen wir uns jedoch davon überzeugen, daß (V) tatsächlich eine Eigenschaft ist, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Dazu werden wir eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen angeben, die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzt. Zum Nachweis der Cauchy-Eigenschaft dient dabei das folgende Kriterium.

<u>Satz 2</u>: Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Es existieren $C \geq 0$ und $q \in [0,1)$ sowie ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq C \cdot q^n.$$

Dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

<u>Bem.</u> Die Voraussetzung des Satzes ist insbesondere dann erfüllt, wenn für $n \geq n_0$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q\,|a_n - a_{n-1}|,$$

denn dann ist

$$|a_{n+1}-a_n| \leq q\,|a_n - a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \ldots \leq q^{n-n_0}\,|a_{n_0+1} - a_{n_0}|$$

$$= q^n \cdot C \quad \text{mit } C = q^{-n_0}\,|a_{n_0+1} - a_{n_0}|.$$

Bew. (von Satz 2): Für $n \geq m$ haben wir

$$|a_n - a_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} - a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \quad (\Delta\text{'s-Ungl.})$$

$$\leq C \cdot \sum_{k=m}^{n-1} q^k = C \cdot q^m \cdot \sum_{k=0}^{n-m-1} q^k = C \cdot q^m \frac{1-q^{n-m}}{1-q}$$

$$\leq C \cdot \frac{q^m}{1-q} \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty)$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir also ein $N = N(\varepsilon)$, so daß für alle $m \geq N$ gilt

$$C \cdot \frac{q^m}{1-q} < \varepsilon$$

und damit auch $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. □

OP. 05.2014

Bsp.: Wir betrachten nun für $a > 0$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 = a \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Wir stellen fest:

1. Für $a \in \mathbb{Q}$ sind alle $x_n \in \mathbb{Q}^+$.
2. $x_n x_{n-1} \geq \frac{a}{2}$ (denn: $x_2 x_1 = \frac{a}{2}(a+1) \geq \frac{a}{2}$ und,

   für $n \geq 3$ $\quad x_n \cdot x_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) = \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{a}{2} \geq \frac{a}{2}$)
3. $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)$

$$= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})\left(1 - \frac{a}{x_n x_{n-1}}\right)$$

Nach 1., 2. ist $0 \le \frac{a}{x_n x_{n-1}} \le 2$ und damit $\left|1-\frac{a}{x_n x_{n-1}}\right| \le 1$, 2.27

also $|x_{n+1}-x_n| \le \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$.

4. Nach Satz 2 (und der anschließenden Bem.) ist (x_n) eine Cauchy-Folge (rationaler Zahlen, falls $a \in \mathbb{Q}$, nach 1.)

5. Aufgrund von (V) existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x \in \mathbb{R}$. Die Rechenregeln ergeben

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Also $x^2 = a$, der Grenzwert ist also die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$, d.h. $x = \sqrt{a}$.

6. Damit ist der Beweis der Existenz von Quadratwurzeln nachgeholt und zugleich ein Verfahren zu ihrer näherungsweisen Berechnung angegeben, das sog. "babylonische Wurzelziehen".

7. Für $a = 2$ ist $x \notin \mathbb{Q}$, also $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Bew. (aus dem Buch X der "Elemente" Euklids, ca. 300 v. Chr.):

Annahme $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}$, p, q teilerfremd, s.d. $x = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = 2 \cdot q^2$, insbes. p^2 gerade

$\Rightarrow p$ gerade (denn das Quadrat von ungerade ist ungerade!)

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$

$\Rightarrow 4r^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q^2$ gerade

$\Rightarrow q$ gerade. Widerspruch zur Teilerfremdheit! $\square$

Im folgenden sollen die wesentlichen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus den Axiomen hergeleitet werden. Wir beginnen mit dem wichtigen Satz von Bolzano-Weierstraß:

Satz 3 (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Bew.: (1) Da (a_n) beschränkt ist, existieren Zahlen A_0 und B_0 mit $A_0 \le a_n \le B_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hiervon ausgehend konstruieren wir rekursiv eine Folge von Intervallen $[A_k, B_k]$ $(k \ge 0)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $[A_{k+1}, B_{k+1}] \subset [A_k, B_k]$ für alle $k \geq 0$

(ii) $B_k - A_k = (B_0 - A_0) \cdot 2^{-k}$ " " $k \geq 0$

(iii) in jedem $[A_k, B_k]$ liegen unendlich viele Folgenglieder, also $\# \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap [A_k, B_k] = \infty$.

Für $k = 0$ sind die Eigenschaften (ii) und (iii) offenbar erfüllt. Wir wählen

$$[A_1, B_1] = \left[\frac{A_0 + B_0}{2}, B_0 \right], \text{ falls}$$

$$\# \left[\frac{A_0 + B_0}{2}, B_0 \right] \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty,$$

andernfalls $[A_1, B_1] = \left[A_0, \frac{A_0 + B_0}{2} \right]$.

Sei nun $[A_0, B_0], [A_1, B_1], \ldots, [A_k, B_k]$ bereits gewählt, so daß die Bedingungen (ii) und (iii) und (i) für jedes $j \leq k-1$ erfüllt sind, so setzen wir

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] = \left[\tfrac{1}{2}(A_k + B_k), B_k \right],$$

falls hierin unendlich viele (a_n) enthalten sind, andernfalls $[A_{k+1}, B_{k+1}] = \left[A_k, \tfrac{1}{2}(A_k + B_k) \right]$.

Damit ist eine Folge von Intervallen mit den Eigenschaften (i) bis (iii) rekursiv definiert.

2. Auswahl einer Teilfolge: Wir wählen

$a_{n_1} = a_1$ und, wenn $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ bereits

bestimmt sind,

$$a_{n_{k+1}} \in \{a_n : n > n_k\} \cap [A_{k+1}, B_{k+1}]$$

Ist dann $l \geq k$, so gilt nach (i)

$$a_{n_k}, a_{n_l} \in [A_k, B_k]$$

und nach (ii)

$$|a_{n_k} - a_{n_l}| \leq |B_0 - A_0| \cdot 2^{-k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty) \quad ((A)!)$$

Also: $\lim\limits_{k,l \to \infty} a_{n_k} - a_{n_l} = 0$. Das bedeutet: Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (a_n) ist eine Cauchy-Folge, die wg. (V) in $\mathbb{R}$ konvergiert. $\square$

Bem. Ohne das archimedische Axiom (A) bricht nicht nur unser Beweis zusammen, sondern auch die Aussage des Satzes wird falsch. Denn:

Gilt (A) nicht, ist die Folge $(nx)_{n \in \mathbb{N}}$ für ein ~~[illegible]~~ $x > 0$ beschränkt. Wg. $|nx - mx| = |n-m|x \geq x$ für $n \neq m$, besitzt $(nx)_n$ keine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist, also auch keine konvergente Teilfolge.

(Unter der Vor. (K1)–(K9), (A1)–(A3) impliziert also der Satz von BW das archimedische Axiom!)

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von BW ist das nachstehende Konvergenzkrit. für Folgen, das auf der Anordnung von $\mathbb{R}$ beruht.

Satz 4: Jede nach oben beschränkte, monoton steigende Folge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent.

Bew.: N.V. ex. $C \in \mathbb{R}$ mit

$$a_1 \leq a_n \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h. (a_n) ist beschränkt und besitzt nach BW (mindestens) einen Häufungswert.

Nehmen wir an es gibt zwei (oder mehr) Häufungswerte a und b mit $a < b$, so setzen wir $\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$. Dann ex. n_0 mit

$$a_{n_0} > b - \varepsilon$$

und aufgrund der Monotonie

$$a_n > b - \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aufgrund unserer Wahl von ε kann

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

nur für solche n mit $n \leq n_0$ gelten, also für endlich viele. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, a sei ein Häufungswert. $\square$

Folgerung 1: Jede nach unten beschränkte, monoton fallende Folge (b_n) ist konvergent.

Bew.: Wende Satz 4 an auf (a_n) mit $a_n = -b_n$.

Fassen wir die Aussagen von Satz 4 und Folgerung 1 zusammen, erhalten wir die einprägsame Formulierung

Folgerung 2: Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Die im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß verwendete Folge von Intervallen nennt man eine Intervallschachtelung. Genauer

Def.: Eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $J_n = [A_n, B_n]$ heißt eine <u>Intervallschachtelung</u>, falls

1. $J_{n+1} \subset J_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ("$(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist absteigend")
2. $\lim_{n\to\infty} B_n - A_n = 0$.

Als eine weitere Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom (V) erhalten wir:

Satz 5 (Intervallschachtelungsprinzip): $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Intervallschachtelung. Dann existiert genau eine Zahl $c\in\mathbb{R}$ mit $c\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

Bew.: 1. Eindeutigkeit: Sind c und c' in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$, so gilt $|c-c'|\leq B_n-A_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} B_n-A_n=0$, folgt $|c-c'|=0$, also $c=c'$.

2. Existenz: Wir haben $[A_n,B_n]=J_n\supset J_{n+1}=[A_{n+1},B_{n+1}]$, also $A_1\leq\ldots\leq A_n\leq A_{n+1}<B_{n+1}\leq B_n\leq\ldots\leq B_1$.
Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also monoton steigend und nach oben beschränkt, daher nach Satz 4 konvergent. Also ex.

$$\lim_{n\to\infty} A_n =: A$$

und, mit einem ähnlichen Argument,

$$\lim B_n =: B.$$

Wg. $A_n\leq B_n$ folgt $A\leq B$ (Exkurs, Lemma 4) und daher aufgrund der Monotonie

$$A_n\leq A\leq B\leq B_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow A\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[A_n,B_n]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n. \qquad \square$$

Bsp. (zu den Sätzen 4 und 5): Approximation der Eulerschen Zahl e:

Wir betrachten die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Die ersten Folgenglieder sind gegeben durch

$$e_1 = (1+1)^1 = 2, \quad e_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25 \quad \text{und}$$

$$e_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}\overline{370}.$$

$\rightsquigarrow$ Vermutung: (e_n) monoton steigend. Dazu schätzen wir den Quotienten $\frac{e_n}{e_{n-1}}$ nach unten ab:

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}$$

$$\underset{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} \geq 1 \Rightarrow e_n \geq e_{n-1}$$

Andererseits ist $e_n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =: e_n^*$ und die Folge (e_n^*) ist monoton fallend (Beweis in den Übungen). Damit:

$$2 = e_1 \leq \ldots \leq e_n \leq e_n^* \leq \ldots e_1^* = 4$$

Insbesondere: (e_n) monoton steigend und nach oben durch $e_1^* = 4$ beschränkt, also nach Satz 4 konvergent.

Man definiert jetzt die Eulersche Zahl durch

$$e := \lim_{n\to\infty} e_n \qquad (e = 2{,}7182818\ldots)$$

Zugleich haben wir hier ein Beispiel für eine Intervallschachtelung, denn

$J_n := [e_n, e_n^*]$ bilden eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $J_{n+1} \subset J_n$, da $e_n \leq e_{n+1} < e_{n+1}^* \leq e_n^*$.

Außerdem: $e_n^* - e_n = (1+\frac{1}{n})e_n - e_n = \frac{1}{n}\cdot e_n \leq \frac{4}{n}$ (s.o.),

also ist auch die zweite Eigenschaft einer Intervallschachtelung gegeben, und es gilt

$$e \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [e_n, e_n^*].$$

In recht engem Zusammenhang mit der Rechnung oben steht der erste der beiden folgenden Grenzwerte:

Bsp. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Beweis: Zu (a) reicht es zu zeigen, dass $(\frac{n}{4})^n \leq n!$. Dies sieht man durch Induktion über n, für $n=1$ lautet die Behauptung $\frac{1}{4} \leq 1$, was offenbar erfüllt ist.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{4}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^n \leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=e_n\leq e_n^*\leq e_1^*=4}\cdot\frac{1}{4}\cdot(n+1)\cdot n! \overset{\text{I.V.}}{\leq} (n+1)!$$

zu (b) Wir setzen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \rightsquigarrow n = (1+x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k$

$$\geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \rightsquigarrow x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Eine weitere Konsequenz aus Satz 4 ist die folgende charakteristische Eigenschaft der reellen Zahlen:

Satz 6: Jede nach oben beschränkte Teilmenge $E \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

Bew.: Sei S eine obere Schranke von E und

$$A_0 := \{S-k : k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } S-k \geq x \text{ für alle } x \in E\}$$

Dann ist A_0 eine endliche Menge, besitzt also ein Minimum

$$a_0 := \min A_0.$$

Nun definieren wir rekursiv:

$$A_{n+1} := \left\{a_n - \frac{k}{2^{n+1}} : k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_n - \frac{k}{2^{n+1}} \geq x \quad \forall x \in E\right\},$$

$$a_{n+1} := \min(A_{n+1}) \quad (\text{auch } \# A_{n+1} < \infty!)$$

Diese Wahl ergibt eine Folge (a_n) mit den folgenden Eigenschaften:

1. $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$,
2. $a_n \geq x \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, x \in E$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. $x_n \in E$ mit $a_n - \frac{1}{2^n} \leq x_n$

Nach 1. und 2. ist die Folge (a_n) also monoton fallend und nach unten beschränkt. Mit Folgerung 1 aus Satz 4 erhalten wir die Existenz von

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Hierfür gilt $a \geq x$ für jedes $x \in E$, denn wir haben $a_n \geq x \ \forall n \in \mathbb{N}, x \in E$. d.h. a ist eine obere Schranke von E. Ferner gilt

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ex. $x_n \in E$, sodaß $a - \frac{1}{2^n} \leq a_n - \frac{1}{2^n} \leq x_n$.

Also kann es keine kleinere obere Schranke von E geben.

$\square$

Folgerung: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge $E' \subset \mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Infimum.

Bew.: Wende Satz 6 an auf $E = -E' = \{-x : x \in E'\}$. $\square$

In diesem Zusammenhang wird häufig die folgende Konvention benutzt:

1. $\sup A := \infty$, falls $A \subset \mathbb{R}$ nach oben, $\inf(A) = -\infty$, falls $A \subset \mathbb{R}$ nach unten unbeschränkt ist;

2. $\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := \infty$

Mit Satz 6 und dieser Konvention sind Supremum und Infimum für jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert.