4. Stetige Funktionen

Bisher: Funktion / Abbildung: $f: X \to Y$ mit beliebigem Definitionsbereich X und ebenfalls beliebigem Zielbereich Y.

Im folgenden: Funktionen im engeren Sinne, d.h. $X, Y \subset \mathbb{C}$.

4.1 Punktweise und gleichmäßige Stetigkeit: Definitionen und Folgenkriterien

Stetigkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis. Viele Existenzfragen lassen sich erst und allein mit Hilfe des Konzepts der Stetigkeit klären, z.B.

- Existenz von Nullstellen, etwa: Gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = 0$? oder: mit $P(z) = 0$, wenn P ein Polynom höheren Grades ist?
- Existenz von Fixpunkten: Das sind Lösungen der Gleichung $f(z) = z$. Durch Betrachtung von $g(z) = f(z) - z$ reduziert sich das auf die Frage nach den Nullstellen.
- Existenz von Lösungen gewisser Optimierungsaufgaben. Die Existenz folgt in vielen Fällen aus der Stetigkeit der zu optimierenden Funktion.

Vorverständnis / Schulwissen:

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset X \to Y \subset \mathbb{R}$ ist stetig, wenn man ihren Graphen ohne abzusetzen zeichnen kann.

Dieser Begriff von Stetigkeit ist zwar richtig, aber unzureichend, z. B. für Funktionen

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (hier ist $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$)

oder $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ (wie will man die "Lücken" von $\mathbb{Q}$ zeichnerisch darstellen?)

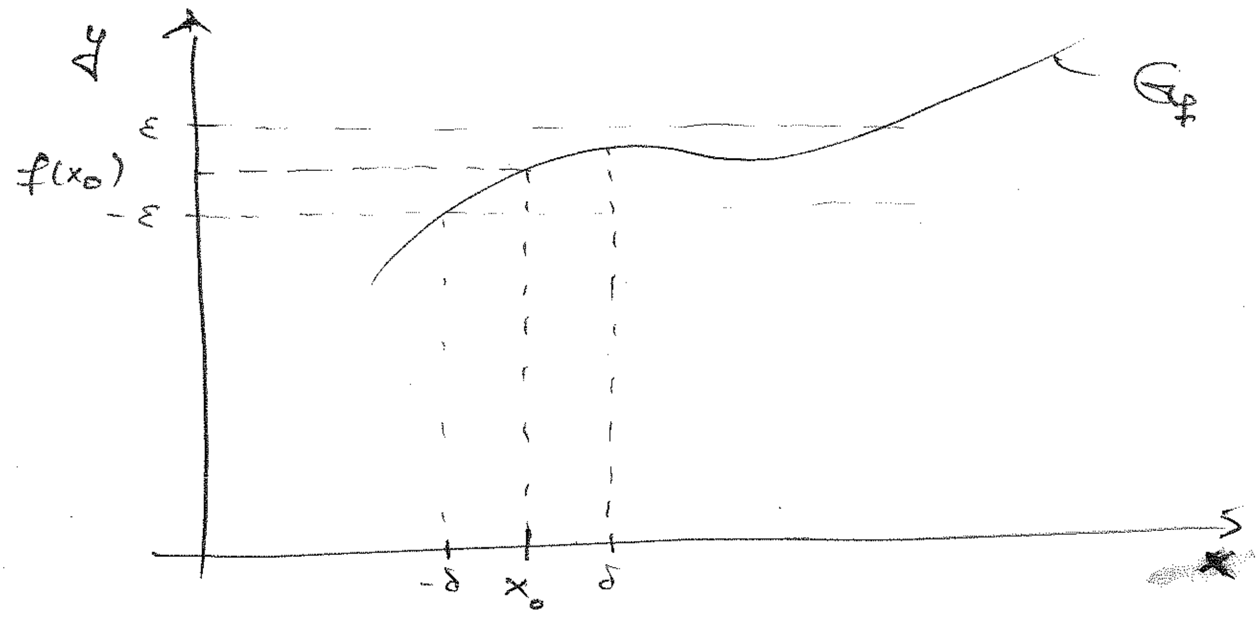
<u>Def.</u> (Stetigkeit): Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ heißt <u>stetig</u> im Punkt $x_0 \in X$, wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, sodaß $\forall x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$

gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f heißt stetig in X, wenn f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist.

Veranschaulichung im Spezialfall $X, f(X) \subset \mathbb{R}$:



Die definierende Eigenschaft sagt jetzt aus:

Wie schmal auch immer der ε-Streifen um $f(x_0)$ vorgegeben wird, so läßt sich stets ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ finden, so daß die gesamte Umgebung

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap X \quad \text{von } x_0$$

noch in diesen Streifen bzw. das Intervall $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ abgebildet wird.

Wenn $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f reellwertig ist haben wir also Übereinstimmung mit dem "naiven" Begriff der Stetigkeit. Mit Hilfe des Begriffs "Umgebung" können wir den Stetigkeitsbegriff noch etwas prägnanter fassen:

<u>Def.</u> (ε-Umgebung): Es seien $\varepsilon > 0$, $X \subset \mathbb{C}$ und $x_0 \in X$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{z \in X : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

eine <u>ε-Umgebung</u> von x_0 in X.

Damit lautet die definierende Eigenschaft der Stetigkeit einer Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ in $x_0 \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ so daß } f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Bsp.:

(1) Sind $a, b \in \mathbb{C}$ fest, so heißt $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = az + b$ eine affin-lineare Funktion.

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ ($\delta > 0$ beliebig, falls $a = 0$) und erhalten für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \delta$:

$$|f(z) - f(w)| = |az + b - aw - b| = |a(z-w)|$$

$$< |a|\delta = \varepsilon.$$

f ist also auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) = z^2$.

Sind jetzt $x_0 \in \mathbb{C}$ fixiert und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$. Dann ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - x_0| < \delta$

$$|f(z) - f(x_0)| = |z - x_0|\,|z + x_0| \leq |z - x_0|\,|z - x_0 + 2x_0|$$

$$\leq |z - x_0|(1 + 2|x_0|) < \delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon.$$

Also ist f stetig in x_0.

Beachte: Wahl von δ in (1) unabhängig von x_0.

Dies ist in (2) nicht mehr möglich.

Die folgenden Beispiele zeigen die Möglichkeiten einer Funktion f auf, in einem speziellen Punkt unstetig zu sein:

(3) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto f(z)=\begin{cases}1 & \text{für } z=0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$, ~~ist~~ $x_0=0$ ist

eine sogenannte hebbare Unstetigkeit (durch Abänderung in einem Punkt erhält man eine stetige Funktion)

(4): $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}x & \text{für } x\le 0\\ x+1 & \text{für } x>0\end{cases}$

„Sprungstelle" im Nullpunkt.

(5): $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x=0\\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x\neq 0\end{cases}$

Hier liegt im Nullpunkt eine sog. wesentliche Unstetigkeitsstelle vor, d.h. $\lim_{n\to\infty} f(\frac{\pm 1}{n})$ existiert nicht.

(6) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z} & \text{für } z\neq 0\\ 0 & \text{für } z=0\end{cases}$ ist

unstetig im Nullpunkt. Hier liegt eine sogenannte „Unendlichkeitsstelle" vor. = P.6.

Die Stetigkeit einer Funktion hängt nicht nur von der Zuordnungsvorschrift ab, sondern wird auch wesentlich bestimmt durch den Definitionsbereich. So ist z.B. jede Funktion

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{C} \quad \text{stetig} \quad (\text{wähle } \delta=\tfrac{1}{2}\,!).$$

Noch überraschender ist vielleicht das folgende Bsp.

(7) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{C},\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x>\sqrt{2}\\ 0 & \text{für } x<\sqrt{2}.\end{cases}$

Diese Funktion ist stetig in jedem $x_0\in\mathbb{Q}$. Wählen wir $\delta=|x_0-\sqrt{2}|$, so ist $|f(x)-f(x_0)|=0$ für jedes x mit $|x-x_0|<\delta$. Die Stetigkeitsbed. ist also erfüllt.

Die Beispiele unstetiger Funktionen (3) bis (6) waren alle nur in einem einzelnen Punkt unstetig. Das ist keineswegs typisch:

(8) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{"} \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

ist in keinem Punkt des Definitionsbereichs stetig.

Begründung: Ist x_0 fixiert und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vorgegeben, so befindet sich in jedem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein x mit $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$.

($\mathbb{Q}$ und auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$!)

Kommen wir noch einmal zurück auf den Unterschied zwischen den Bsp.en (1) und (2). Im ersten Fall war es möglich, δ unabhängig von x_0 zu wählen, so daß die charakterisierende Bedingung der Stetigkeit erfüllt ist, im zweiten Fall nicht. Dies führt zu folgender Verschärfung des Stetigkeitsbegriffs:

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ gilt für alle $z, w \in X$ mit $|z - w| < \delta$.

Die affin-lineare Funktion aus (1) ist also gleichmäßig stetig, die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion $f(z) = z^2$ nicht. Eine Klasse gleichmäßig stetiger Funktionen ist die folgende:

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L, falls für alle $z, w \in X$ die Ungleichung

$$|f(z) - f(w)| \leq L\,|z-w|$$

gilt.

Bem.: Jede Lipschitz-stetige Funktion ist glm. stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann ist für $z, w \in X$ mit $|z-w| < \delta$:

$$|f(z) - f(w)| \leq L\,|z-w| < L \cdot \delta = \varepsilon.$$

Bsp.: Affin-lineare Funktionen; $f(z) = \bar{z}$;
$f(z) = \mathrm{Re}(z)$; $f(z) = \mathrm{Im}(z)$; $f(z) = |z|$, hierfür beachte man $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$.

Wir können nun durch direkte Rechnung leicht einsehen, daß Polynome und Potenzreihen stetig sind (genauer gesagt: stetige Funktionen definieren). Gleichmäßige Stetigkeit ist hier im allgemeinen nicht zu erwarten, wie das Bsp (2) oben bereits gezeigt hat.

Satz 1: Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist

$$P : K_R(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z)$$

stetig und die Einschränkung

$$P|_{\overline{K_r(0)}} : \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}}_{=: \overline{K_r(0)}} \to \mathbb{C}$$

für jedes $r \in [0, R)$ Lipschitz- und damit gleichmäßig stetig.

Bew.: Es ist nur die zweite Aussage zu zeigen. Dazu seien $r < R$ und $z, w \in \overline{K_r(0)}$ vorgegeben. Dann ist

$$P(z) - P(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - w^n)$$

$$= (z-w) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k \quad \text{(geometrische Summenformel!)}$$

Wg $|z|, |w| \leq r$ folgt

$$|P(z) - P(w)| \leq |z-w| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z^{n-1-k} w^k|$$

$$\leq |z-w| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \cdot r^n}_{=: L(r) < \infty},$$

da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

$\square$

Folgerung: Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig, ebenso Polynome $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Die ε-δ-Definition der Stetigkeit ist wichtig für Beweiszwecke und läßt sich gut handhaben bei den Lipschitz-stetigen Funktionen. Der Beweis der Stetigkeit z.B. der rationalen Funktionen mit ε und δ erweist sich hingegen bereits in einfachen Fällen als recht mühsam.

Übung: Man zeige mit der ε-δ-Definition, daß

$f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist!

In solchen Fällen ist es einfacher, das nachstehende Folgenkriterium für die Stetigkeit zu verwenden.

Satz 2: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in X$, wenn für alle Folgen (x_n) in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, daß auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Bew.: "$\Rightarrow$" Sei f stetig in x_0 und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ex. $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$. Ist dann (x_n) eine Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, so ex. $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$, so daß $|x_n - x_0| < \delta$ $\forall n \geq N$. Für $n \geq N$ gilt demnach $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

"$\Leftarrow$" Ist f unstetig in $x_0 \in X$, so gilt

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$, so daß $\forall\, \delta > 0$ ein $x = x(\delta) \in X$ existiert

mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Setzen wir $\delta = \frac{1}{n}$, so erhalten wir eine Folge

(x_n) in X mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ aber $(f(x_n))_n$ konvergiert

nicht gegen $f(x_0)$. $\square$

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich:

Folgerung: (i) Sind $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

so sind auch $\lambda f + \mu g$ und $f \cdot g$ stetig.

(ii) Sind $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig, $N = \{z \in X : g(z) = 0\}$,

so ist auch $\frac{f}{g} : X \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere

sind alle rationalen Funktionen stetig in ihrem

Definitionsbereich.

(iii) Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, so daß $g(\tilde{X}) \subset X$ ist, so ist auch

$$f \circ g : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$$

stetig.

Ebenso wie im Fall der Stetigkeit gibt es ein Folgenkriterium, welches die Überprüfung der gleichmäßigen Stetigkeit erleichtert:

<u>Satz</u> 3: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle Folgenpaare (x_n) und (y_n) in X mit $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ gilt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

<u>Bew.</u>: '$\Rightarrow$' Sei f glm. stetig und $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Dann ex. $\delta > 0$, so daß $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ für alle $z, w \in X$ mit $|z - w| < \delta$. Ferner existiert zu jedem Folgenpaar $(x_n), (y_n)$ wie oben ein $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$, so daß $|x_n - y_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann auch $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Ist f nicht glm. stetig, so gilt:
$\exists\, \varepsilon_0 > 0$, so daß $\forall \delta > 0$ ein $x = x(\delta)$ und ein $y = y(\delta)$ existieren mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$

Mit $\delta = \frac{1}{n}$ erhalten wir Folgen (x_n) und (y_n), so daß $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Letzteres bedeutet, daß $(f(x_n) - f(y_n))_n$ nicht gegen Null konvergiert. $\square$

Anwendung:

(1) $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist nicht glm. stetig.

Zum Nachweis wählen wir die Folgenpaare $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{2n}$, so daß $x_n - y_n = \frac{1}{2n} \to 0$ $(n\to\infty)$.

Andererseits ist $f(x_n) - f(y_n) = n - 2n = -n \to -\infty$ $(n\to\infty)$

Satz 3 liefert also die Behauptung.

(2) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > \sqrt{2} \\ 0 & \text{für } x < \sqrt{2} \end{cases}$

Dazu wählen wir Folgen (x_n), (y_n) in $\mathbb{Q}$ mit

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $x_n < \sqrt{2} < y_n$.

Dafür gilt $f(y_n) - f(x_n) = 1$, also auch

$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) - f(x_n) = 1 \neq 0$, f ist also nach Satz 3 nicht glm. stetig.

Diese Beispiele zeigen, daß die gleichmäßige Stetigkeit i. allg. eine echt stärkere Eigenschaft ist als die bloße Stetigkeit. Unter einer bestimmten Zusatzvoraussetzung an den Definitionsbereich fallen jedoch beide Begriffe zusammen:

Def. (Abgeschlossenheit, Kompaktheit)

(1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls für jede konvergente Folge (x_n) in A mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{C}$ bereits gilt, daß $a \in A$.

(2) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Bsp.: $\overline{K_r(a)} := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$ und $[a,b]$ sind kompakt. Hingegen ist $[a,\infty)$ zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt und daher auch nicht kompakt.

Satz 4: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f bereits gleichmäßig stetig.

Bew.: Nehmen wir an, f sei nicht glm. stetig, so existiert ein Folgenpaar (x_n), (y_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| > 0.$$

Für eine Teilfolge, die wieder mit (x_n) bzw (y_n) bezeichnet sei, bedeutet dies: Es ex. $\varepsilon_0 > 0$, so daß

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \ \forall n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$$

Da K kompakt: $\exists$ TF (x_{n_k}), (y_{n_k}) und $a \in K$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = a$.

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$0 = |f(a) - f(a)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|,$$

im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich haben darüber hinaus die folgende Eigenschaft:

Satz 5: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Bew.: Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Dann existiert eine Folge (x_n) in K mit $f(x_n) = y_n$. Da K beschränkt ist, existiert nach Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von (x_n) und ein $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbb{C}$. Da K abgeschlossen ist, gilt sogar $x_0 \in K$. Mit der Stetigkeit von f folgt $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) =: y_0 \in f(K)$. Die Folge (y_n) besitzt also eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge.

Abgeschlossenheit: Gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{C}$, so ist

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \in f(K).$$

Beschränktheit: Wäre $f(K)$ unbeschränkt, gäbe es eine Folge (y_n) in $f(K)$ mit $|y_n - y_m| \geq 1$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Widerspruch zur Existenz einer konvergenten Teilfolge.

$\square$