5. Differenzierbarkeit

5.1 Die Ableitung. Ableitungsregeln.

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in X$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0.

f heißt differenzierbar in X, falls f in jedem Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar ist.

Bem.: (1) Beim Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \ldots$ sind nur Folgen mit $x_n \neq x_0$ zugelassen, die Existenz mindestens einer solchen Folge wird vorausgesetzt.

(2) Mit $h := x - x_0$ ist $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$.

(3) Weitere Schreibweisen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x = x_0}$

(4) Beachte: Der Def.-Bereich X ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. D'barkeit im Komplexen hat sehr viel weitreichendere Konsequenzen und bleibt der Funktionentheorie vorbehalten. Als Zielbereich ist $\mathbb{C}$ hingegen zugelassen.

(5) Geometrische Interpretation für reellwertiges f: $f'(x_0)$ = Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. (Skizze)

(6) Differenzierbarkeit in x_0 $\Longrightarrow$ Stetigkeit in x_0

Bew. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$ ex.

$\Longrightarrow \left| \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \right| \le M$ (konvergente Folgen sind beschränkt!)

$\Longrightarrow |f(x_n)-f(x_0)| \le M\,|x_n-x_0| \longrightarrow 0$ falls $x_n \to x_0$, wie bei d'bar vorausgesetzt.

(7) Ist $f: \mathbb{R}\supset X \to \mathbb{C}$ in jedem $x_0\in X$ differenzierbar, wird hierdurch eine Funktion

$$f': \mathbb{R}\supset X \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert. Diese wird als Ableitung von f bezeichnet. Ist f' wiederum in jedem $x_0\in X$ differenzierbar, bildet man die

$$\text{2. Ableitung } f'' := (f')' : \mathbb{R}\supset X \longrightarrow \mathbb{C}$$

und allgemein die

$$n\text{. te Ableitung } f^{(n)} := (f^{(n-1)})' : \mathbb{R}\supset X \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Besitzt $f: \mathbb{R}\supset X \to \mathbb{C}$ eine stetige n-te Ableitung, nennt man f n-mal stetig differenzierbar. Die Klasse (Vektorraum!) aller n-mal stetig d'baren Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{C}$ bezeichnet man mit

$$C^n(X,\mathbb{C}) \quad (C^n(X,\mathbb{R}), \text{ falls } f \text{ reellwertig}).$$

Bsp.:

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) = ax+b$ mit festen $a, b \in \mathbb{C}$, eine affin-lineare (lineare, falls $b=0$) Funktion.

Diese ist differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(a(x+h)+b-ax-b\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot ah = a$$

(Insbesondere ist auch jede konstante Funktion d'bar, ihre Ableitung ist $f'(x)=0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n =: f(x)$ ($n \in \mathbb{N}$ fest):

Hierfür gilt nach dem binomischen Lehrsatz:

$$f(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^k$$

und daher

$$\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^k - x^n\right)\Big/ h$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \longrightarrow \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Für $x \neq 0$ nach Bsp. (1): $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

In $x = 0$ ist f nicht d'bar, denn für $h_n = \frac{(-1)^n}{n}$

ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\left(f(0+h_n) - f(0)\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$

nicht existent.

Zur Vereinfachung der Berechnung der Ableitung gibt es eine Reihe von Ableitungsregeln. Diese ergeben sich zum Teil recht einfach aus den Rechenregeln für Grenzwerte:

Satz 1: Es seien $f, g : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch

$$f+g, \quad \lambda f \quad \text{und} \quad f \cdot g : X \to \mathbb{C}$$

d'bar, und es gelten

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

(Linearität der Ableitung) sowie

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

(Produktregel). Ist $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, so ist auch

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{C} \quad \text{differenzierbar mit}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g(x)^2}\left(f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)\right) \quad \text{(Quotientenregel).}$$

Bew. der Quotientenregel:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x+h)\, g(x)} \cdot \frac{1}{h}\left[f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x+h)\right]$$

$$= \frac{1}{g(x)\, g(x+h)}\left[\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))\, g(x) - \frac{1}{h} f(x)(g(x+h) - g(x))\right]$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{g(x)^2}\left(f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)\right).$$

Beim Grenzübergang wurde bereits Bem. (6) benutzt. $\square$

(Linearität und Produktregel zur Ü empfohlen!)

Anwendungen:

(1) Ist $P: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{C}$, so ist P auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k x^{k-1}.$$

(Linearität der Ableitung und Bsp. (2)).

(2) Sind $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Polynome, $N = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$

so ist die rationale Funktion

$$R : \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

differenzierbar mit $R'(x) = \frac{1}{Q(x)^2}(P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x))$.

Speziell: $R(x) = x^{-n}$. D'bar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$R'(x) = \frac{1}{x^{2n}}(-n x^{n-1}) = -n\, x^{-n-1}.$$

Durch Potenzreihen definierte Abbildungen sind ebenfalls differenzierbar, die Ableitung ist wieder eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius. Solche Funktionen sind also – ebenso wie Polynome – beliebig oft differenzierbar.

Genauer gilt der folgende

Satz 2: Ist $P:(-R,R) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x)$ gegeben durch eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R>0$, so ist P auf $(-R,R)$ d'bar mit

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}.$$

Die Potenzreihe $P'(x)$ hat denselben Konvergenzradius R

Sprechweise: "Potenzreihen kann man gliedweise differenzieren." (Gilt i. allg. nicht für Funktionenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$!)

Folgerung: Potenzreihen sind beliebig oft diff'bar.

Bew.: Behauptet wird $\frac{1}{x-x_0}(P(x)-P(x_0)) \xrightarrow[(x\to x_0)]{} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x_0^{n-1}$,

wobei

$$\frac{1}{x-x_0}(P(x)-P(x_0)) = \frac{1}{x-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0^n)$$

geometrische Summenformel

$$= \frac{1}{x-x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right)(x-x_0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k .$$

Damit ergibt sich für die Differenz

$$\frac{1}{x-x_0} (P(x)-P(x_0)) - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x_0^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-1-k} x_0^k) - n x_0^{n-1} \right)$$

Für die innere Summe erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(x^{n-1-k} x_0^{k} - x_0^{n-1}\right) \qquad \text{(n Summanden!)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1-k} \left(x^{k} - x_0^{k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1-k} \sum_{\ell=0}^{k-1} x^{k-1-\ell} x_0^{\ell} \cdot (x - x_0).$$

Sind jetzt $0 \le |x|, |x_0| \le r < R$, folgt

$$\left| \frac{1}{x-x_0}\left(P(x) - P(x_0)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1} \right|$$

$$\le |x - x_0| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{k-1} \underbrace{|x|^{k-1-\ell} \, |x_0|^{n-1-k+\ell}}_{\le r^{n-2}}$$

$$\le |x - x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = L(r)|(x-x_0)|,$$

mit $L(r) < \infty$, da $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2}|a_n|} = R$.

Nun folgt die Beh. aus $L(r)\,|x - x_0| \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0)$. $\square$

Bsp.: (1) Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(\alpha x)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$

ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \cdot \alpha^{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1} x^{n}}{n!} = \alpha \cdot \exp(\alpha x)$$

Insbes. für $\alpha = \ln(a)$, $a > 0$: $a^{x} = \exp(x \cdot \ln(a))$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} a^{x} = \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a)\, a^{x}.$$

(2) Zerlegung von e^{ix} in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\cos'(x) + i\sin'(x) = \frac{d}{dx}e^{ix} = i e^{ix} = i\cos(x) - \sin x,$$

also $\cos'(x) = -\sin(x)$ und $\sin'(x) = \cos(x)$.

(3) In Verbindung mit der Quotientenregel:

$$\tan'(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Wir kommen zu weiteren Ableitungsregeln:

Satz 3 (Kettenregel): Gegeben seien Funktionen $f : \mathbb{R} \supset Y \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ mit $g(X) \subset Y$. g sei in $x_0 \in X$ und f in $y_0 = g(x_0) \in Y$ d'bar. Dann ist auch

$$f \circ g : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

in x_0 d'bar und es gilt $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Bew.: Wir setzen

$$f^*(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$$

Dann ist f^* in y_0 stetig, da f in y_0 d'bar ist. Ferner gilt

$$\frac{f\circ g(x) - f\circ g(x_0)}{x - x_0} = f^*(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Für $x \to x_0$ folgt die Beh.. $\square$

<u>Satz</u> 4 (Ableitung der Umkehrfunktion): Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. In $x_0 \in I$ sei f d'bar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$$

in $y_0 := f(x_0)$ d'bar und es gilt $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

<u>Bew.</u>: Wir haben

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

was für $x \neq x_0$ wohldef. ist wg. der Monotonie von f. Setzen wir $y = f(x)$, so gilt: $x \to x_0 \iff y \to y_0$, denn f und f^{-1} sind stetig. Also

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0). \qquad \square$$

<u>Bem.</u>: (1) Herleitung der Ableitungsformel aus der Kettenregel: $x = (f^{-1} \circ f)(x) \Rightarrow 1 = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$. Dividiere durch $f'(x)$. Aussage von Satz 4 ist stärker: Existenz des Grenzwerts.

(2) In den Anwendungen: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Bsp.: (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ d'bar, $h(x) = f(ax+b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist auch h d'bar mit $h'(x) = f'(ax+b) \cdot a$. (Satz 3)

Speziell: $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = n \cdot a \cdot (ax+b)^{n-1}$

(Nicht ausmultiplizieren!)

(2) $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ ist definiert als Umkehrfkt. der e-Fkt. Also $f(x) = \exp$, $f^{-1}(x) = \ln(x)$. Satz 4 ergibt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

(3) $\arcsin: (-1,1) \to \mathbb{R}$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hierbei $x \neq \pm 1$, weil $\sin'(\arcsin(\pm 1)) = 0$, so daß Satz 4 nicht anwendbar ist.

(4) $\arctan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mit Satz 4:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \;(*)$$ Nun ist

$$\tan'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 1 + \tan^2(x)$$

Also: $$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(5) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(\alpha \cdot \ln(x)) \underset{(2)}{=} \exp(\alpha \cdot \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Also die Verallgemeinerung von $\frac{d}{dx}x^n = n x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ für reelle Exponenten α und $x > 0$.