Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2012
19.07.2012

KLAUSUR ZU ANALYSIS I

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Die Dezimaldarstellung der Eulerschen Zahl e ist periodisch.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(b) Wenn die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f auf $(-1, 1)$ durch eine Potenzreihe darstellbar.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv und monoton, so ist f stetig.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(d) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(e) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, so existiert eine Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

Bitte wenden!

2.

(a) Formulieren Sie die Anordnungsaxiome, denen der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen genügt, und das Archimedesche Axiom.

(b) Es sei K ein angeordneter Körper, in dem jede beschränkte Folge einen Häufungswert besitzt. Zeigen Sie, dass K vollständig ist. (5/3 P.)

3. Gegeben seien die Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2+\frac{3}{n}\right)^n z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) z^n$

Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ diese Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen!

(Beachten Sie, dass gegebenenfalls eine spezielle Untersuchung für den Rand des Konvergenzkreises erforderlich ist.)

(2/3/5 P.)

4. Untersuchen Sie, ob die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}\,x_n^2 + \frac{2}{3}, \qquad x_0 = 2$$

konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (10 P.)

5. Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ auf den Intervallen

(a) $(0,1)$ und (b) $[1,\infty)$

gleichmäßig stetig ist. (3/2 P.)

6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2-2}$, (3 P.)

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x^2)$, (2 P.)

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x}$, (2 P.)

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1+2i}{3}\right)^k$ in der Form $a+ib$. (3 P.)

Die Klausur gilt mit 25 (bzw. mit 20) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!