Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2012
19.07.2012

KLAUSUR ZU ANALYSIS I - LÖSUNGEN

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Die Dezimaldarstellung der Eulerschen Zahl e ist periodisch.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(b) Wenn die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f auf $(-1, 1)$ durch eine Potenzreihe darstellbar.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv und monoton, so ist f stetig.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(d) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(e) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, so existiert eine Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

2.

(a) Formulieren Sie die Anordnungsaxiome, denen der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen genügt, und das Archimedesche Axiom.

Siehe V. Abschnitt 2.2.

(b) Es sei K ein angeordneter Körper, in dem jede beschränkte Folge einen Häufungswert besitzt. Zeigen Sie, dass K vollständig ist. (5/3 P.)

Ist (x_n) eine Cauchy-Folge in K, so ist (x_n) beschränkt, denn zu $\varepsilon = 1$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < 1$ für alle $n, m \geq N$, woraus sich mit der Dreiecksungleichung $|x_n| \leq \max\{|x_k|, k \leq N\} + 1$ ergibt. Nach Voraussetzung existiert also eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Nun bleibt lediglich zu zeigen, dass (x_n) gegen denselben Grenzwert konvergiert.

3. Gegeben seien die Potenzreihen

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)^n z^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) z^n$$

Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ diese Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen!

(Beachten Sie, dass gegebenenfalls eine spezielle Untersuchung für den Rand des Konvergenzkreises erforderlich ist.)

(2/3/5 P.)

Zu (a): Wir haben $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$ und damit nach der Euler-Formel $R = \infty$. Die Reihe konvergiert also für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Zu (b): Für $a_n = \left(2 + \dfrac{3}{n}\right)^n$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$, Cauchy-Hadamard ergibt $R = \frac{1}{2}$. Folgerung: Die Reihe konvergiert absolut für $|z| < \frac{1}{2}$ und divergiert für $|z| > \frac{1}{2}$. Ist $|z| = \frac{1}{2}$, so ist $a_n z^n$ keine Nullfolge, also divergiert die Reihe.

Zu (c): Mit $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ haben wir $\frac{1}{2n+1} \leq a_n \leq 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ und damit nach Cauchy-Hadamard $R = 1$. Folgerung: Absolute Konvergenz für $|z| < 1$, Divergenz für $|z| > 1$. Für $z = 1$ divergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nach dem verallgemeinerten Leibniz-Kriterium, aber die Konvergenz ist nicht absolut.

4. Untersuchen Sie, ob die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}\, x_n^2 + \frac{2}{3}, \qquad x_0 = 2$$

konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (10 P.)

1. Feststellung: $0 \leq x_n \leq 2$ (klar für $n = 0$, induktiv für $n \geq 1$).

2. Feststellung: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{6}(x_n^2 - x_{n-1}^2)$.

Variante 1: Zusammen mit $2 = x_0 \geq x_1 = \frac{4}{3}$ ergibt die zweite Feststellung, dass die Folge monoton fällt (und nach unten beschränkt ist).

Variante 2: Aus $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{6}(x_{n-1} + x_n)|x_{n-1} - x_n| \leq \frac{2}{3}|x_{n-1} - x_n|$ folgt mit einem Kriterium aus der V., dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Folgerung aus beiden Varianten: (x_n) ist konvergent.

Berechnung des Grenzwerts: Durch Grenzübergang in der Rekursionsformel erhält man für den Grenzwert x:

$$x = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Daraus folgt $x \in \{3 \pm \sqrt{5}\}$. Da $x_n \leq 2$ für alle n gilt, erhalten wir $x = 3 - \sqrt{5}$.

5. Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ auf den Intervallen

(a) $(0, 1)$ und (b) $[1, \infty)$

gleichmäßig stetig ist. (3/2 P.)

Zu (a): Hier ist die Funktion nicht gleichmäßig stetig. Zum Nachweis betrachte man etwa das Folgenpaar $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{2n}$ und wende das Folgenkriterium für die glm. Stetigkeit an.

Zu (b): Die Funktion ist hier differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Der Schrankensatz ergibt die gleichmäßige Stetigkeit.

6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{3}\cdot 3} = e^3$ (3 P.)

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln(x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}} = 0$ *(Regel von de l'Hospital)* (2 P.)

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{x} = 1$ *(Regel von de l'Hospital)* (2 P.)

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1+2i}{3}\right)^k$ in der Form $a + ib$. (3 P.)

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+2i}{3}\right)^n$*, also ist gleich der geometrischen Reihe (da $|q| = |\frac{1+2i}{3}| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$) mit der Summe $\frac{1}{1-q} = \frac{3}{4}(1+i)$*

Die Klausur gilt mit 25 (bzw. mit 20) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!