Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
18.09.2012

NACHKLAUSUR ZU ANALYSIS I

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich.
Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Jede beschränkte Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(b) Alle Nullstellen der Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind reell.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch, so ist f gleichmäßig stetig.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(d) Die Gleichung $e^x \cdot x^7 = 17$ besitzt genau eine reelle Lösung.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(e) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und differenzierbar, so ist die Ableitung von f beschränkt.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}(\exp(\exp(x)) - e)$ (3 P.)

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ (3 P.)

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (3 P.)

(d) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} dx$ (3 P.)

Bitte wenden!

3. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4711}{n} x^n$ (2 P.)

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^n$ (4 P.)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}$ (6 P.)

4. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = (x^3 - 6x^2 + 14x - 14)\exp(x)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.
Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. (4 P.)

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und deren Typ. (6 P.)

(c) Berechnen Sie $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.
(Hinweis: Es ist $e^2 \approx 7,389$.) (3 P.)

5.

(a) Zeigen Sie: Für $x \geq 0$ ist $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$. (3 P.)

(b) Gilt eine entsprechende Ungleichung für $x \in (-1, 0]$?
Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese. (3 P.)

6. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int x^2 \cos(x) dx$ (3 P.) (b) $\int x \cos(x^2) dx$ (2 P.)

(c) $\int \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) dx$ (3 P.) (d) $\int \sin(x)\cos^2(x) dx$ (2 P.)

Die Klausur gilt mit 28 (bzw. mit 23) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!