Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
18.09.2012

NACHKLAUSUR ZU ANALYSIS I - LÖSUNGEN

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich.
Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Jede beschränkte Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(b) Alle Nullstellen der Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind reell.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch, so ist f gleichmäßig stetig.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(d) Die Gleichung $e^x \cdot x^7 = 17$ besitzt genau eine reelle Lösung.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(e) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und differenzierbar, so ist die Ableitung von f beschränkt.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(\exp(\exp(x)) - e)$ (3 P.)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{e^x} \cdot e^x}{1} = e \qquad \textit{(Regel von de l'Hospital)}$$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ (3 P.)

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \qquad \textit{(Teleskopsumme)}$$

Also ist $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (3 P.)

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

(d) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$ (3 P.)

$$= \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_0^\beta e^{-x}dx = \lim_{\beta\to\infty} \left(-e^{-x}\big|_0^\beta\right) = \lim_{\beta\to\infty} (e^0 - e^{-\beta}) = 1$$

3. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{4711}{n} x^n$ (2 P.)

$\binom{4711}{n} = 0$ *für alle* $n > 4711$, *d. h. die Reihe ist ein Polynom, also konvergiert die Reihe für alle* $x \in \mathbb{R}$ *absolut.*

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^n$ (4 P.)

Für $a_n = \frac{n}{2^n}$ *ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ *und damit nach der Formel von Cauchy-Hadamard* $R = 2$. *Daraus folgt, dass die Reihe für* $|x| < 2$ *absolut konvergiert und für* $|x| > 2$ *divergiert.*
Ist $|x| = 2$, *so ist* $|a_n x^n| = n$, *also ist* $a_n x^n$ *keine Nullfolge und die Reihe divergiert.*

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}$ (6 P.)

Definiere $z := e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$, *dann gilt* $|z| = 1$. *Nach dem verallgemeinerten Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe für alle solche* $z \neq 1$ ($\Leftrightarrow x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), *aber nicht absolut, da die harmonische Reihe divergiert. Aus demselben Grund divergiert die Reihe für* $z = 1$, *d.h. für* $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = (x^3 - 6x^2 + 14x - 14)\exp(x)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.
Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. (4 P.)

$$f'(x) = (3x^2 - 12x + 14)e^x + (x^3 - 6x^2 + 14x - 14)e^x = (x^3 - 3x^2 + 2x)e^x$$

$$f''(x) = (3x^2 - 6x + 2)e^x + (x^3 - 3x^2 + 2x)e^x = (x^3 - 4x + 2)e^x$$

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und deren Typ. (6 P.)

$f'(x) = 0$ (die notwendige Bedingung für lokale Extrema) ist äquivalent zu: $x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = 2$. Es ist $f''(0) > 0$, $f''(1) < 0$ und $f''(2) > 0$. Also liegen in den Punkten $x = 0$ und $x = 2$ (isolierte) lokale Minima und in $x = 1$ ein (isoliertes) lokales Maximum vor.

(c) Berechnen Sie $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.
(Hinweis: Es ist $e^2 \approx 7,389$.) (3 P.)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *also ist* $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(0) = -14e^0 = -14 < 0$, *und* $f(2) = -2e^2 < -14$. *Somit ist* $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(2) = -2e^2$.

5.

(a) Zeigen Sie: Für $x \geq 0$ ist $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$. (3 P.)

Sei $f(x) := \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Diese Funktion ist definiert und stetig für alle $x \in (-1, \infty)$. Behauptung: $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$.
Beweis. Wir finden $f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$, also ist $f'(x) > 0$ für $x > 0$. Somit ist f auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend und $f(0) = 0$, d. h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. (Genauer: $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ und $f(0) = 0$.)

(b) Gilt eine entsprechende Ungleichung für $x \in (-1, 0]$?
Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese. (3 P.)

$f'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0$ auch auf $(-1, 0)$, also ist $f(x)$ streng monoton steigend auch auf $(-1, 0]$ mit $f(0) = 0$, d. h. $f(x) \leq 0$ für alle $x \in (-1, 0]$. Somit ist die folgende Behauptung bewiesen:

$$\textit{Für}\ \ x \in (-1, 0]\ \ \textit{gilt}\ \ \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}.$$

6. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)dx$ (3 P.) (b) $\displaystyle\int x\cos(x^2)dx$ (2 P.)

(c) $\displaystyle\int \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) dx$ (3 P.) (d) $\displaystyle\int \sin(x)\cos^2(x)dx$ (2 P.)

(a) $= (x^2 - 2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C$ *(zweimal partielle Integration)*

(b) $= \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$ *(Substitutionsregel mit $\varphi(x) = x^2$)*

(c) $= \int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$ *(Substitutionsregel mit $\varphi(x) = 2x$)*

(d) $= -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$ *(Substitutionsregel mit $\varphi(x) = \cos(x)$)*

Die Klausur gilt mit 28 (bzw. mit 23) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!