Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
24.07.2014

Klausur zu Analysis I

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Mittelwertsatz und Anwendungen der Folgerungen daraus)	12 Punkte
A3 (Untersuchung eine speziellen Funktion)	10 Punkte
A4 (Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)	8 Punkte
A5 (Frage zu Konvergenz und absoluter Konvergenz)	5 Punkte
A6 (Grenzwerte)	10 Punkte
A7 (Konvergenzradius)	6 (+4) Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 61+4 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert auch jede Umordnung $(a_{\sigma(n)})_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = a$.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Ist $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (-1,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Extremum.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen mit Werten in $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so nimmt f ein globales Extremum an.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+5+5 P.)** Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) genau an und beweisen Sie
   (a) für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichungen $\sin(x) < x < \tan(x)$,

   (b) für $x > 0$ die Identität $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

3. **(5×2 P.)** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^2 e^{-x^2}$.

   (a) Berechnen Sie $f'(x)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so, dass alle Nullstellen von f' ablesbar sind.

   (b) Geben Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x)$ an.

   (c) Untersuchen Sie, ob f gleichmässig stetig ist. Formulieren Sie eine Behauptung und begründen Sie diese.

   (d) Bestimmen Sie $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Minimum handelt. Geben Sie gegebenenfalls eine Minimalstelle an.

   (e) Bestimmen Sie $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Maximum handelt. Geben Sie gegebenenfalls eine Maximalstelle an.

4. **(5+3 P.)** Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert.

   (b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.

5. **(2+3 P.)** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ und $a_n^- = \max(-a_n, 0)$. Was können Sie über die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ aussagen, wenn

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert?

   Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und begründen Sie diese.

6. **(5×2 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^3+3n)^2 - n^6}{n^4}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(1+i)^k}{2^k}$ (in der Form $a+ib$)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$

7. **(3 + 3 (+4) P.)** (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$$

(b) Welche Folgerungen über das Konvergenzverhalten dieser Potenzreihe ergeben sich aus Ihrem Ergebnis? (Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teil (a) *nicht* gelöst haben.)

(c) Etwas schwieriger zu beantworten ist die Frage nach der Konvergenz der Reihe für z aus dem Rand des Konvergenzkreises. Dies sei daher als Zusatzaufgabe gestellt.