1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert auch jede Umordnung $(a_{\sigma(n)})_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = a$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(b) Ist $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (-1,1)$ mit $f'(x_0) = 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Extremum.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(d) Die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen mit Werten in $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(e) Ist $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so nimmt f ein globales Extremum an.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

2. (2+5+5 P.) Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) genau an

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diffbar in (a,b). 1P.

Dann ex. ein $\xi\in(a,b)$, so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$ 1P.

(Auch ok.: f diffbar auf $[a,b]$, $\xi\in[a,b]$, $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ und ähnl.)

und beweisen Sie

(b) für $x>0$ die Identität $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$,

Wir haben $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. (Vorl.) 1P.

Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{1+x^2},$$ 1P.

so dass $\frac{d}{dx}\left(\arctan(x)+\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)=0$. 1P.

Also existiert $C\in\mathbb{R}$ so dass

$$\arctan(x)+\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)=C.$$ 1P.

Wg. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ folgt $C=\frac{\pi}{2}$ und damit die Beh. 1P.

(Alt. zum letzten Schritt: $\lim_{x\to 0}\arctan(x)=0$ und $\lim_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$ ergeben ebenfalls $C=\frac{\pi}{2}$)

(c) für $0<x<\frac{\pi}{2}$ die Ungleichungen $\sin(x)<x<\tan(x)$.

Wir setzen $f(x)=x-\sin(x)$ und $g(x)=\tan(x)-x$. 1P.

Dann ist

$$f'(x)=1-\cos(x)>0\quad (x\in(0,\tfrac{\pi}{2})\ !),$$ 1P.

$$g'(x)=1+\tan^2(x)-1>0\quad (x\in(0,\tfrac{\pi}{2})).$$ 1P.

Also sind f und g streng monoton steigend auf $[0,\frac{\pi}{2})$ 1P.

Wg. $f(0)=g(0)=0$ folgt für $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, dass $f(x)>0$ und $g(x)>0$ und das ist die Beh. 1P.

Alt: direkt mit dem MWS: $\sin(x)=\sin(x)-\sin(0)$
$=\sin'(\xi)\cdot x=\cos(\xi)x<x<(1+\tan^2(\xi))x$
$=\tan'(\xi)\cdot x=\tan(x)-\tan(0)=\tan(x)$. gibt auch 5 P.

3. (5×2 P.) Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^2 e^{-x^2}$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so, ~~weit wie möglich~~ dass alle Nullstellen von f' ablesbar sind:

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$ 1P.

$= 2x(1-x^2)e^{-x^2}$ 1P.

$= 2x(1-x)(1+x) \cdot e^{-x^2}$ beides ok.

(b) Geben Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$ an.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ 1P.

$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$ 1P.

(c) Untersuchen Sie, ob f gleichmässig stetig ist. Formulieren Sie eine Behauptung und begründen Sie diese.

Beh.: f ist glm. stetig. 1P.

Begründung: Da f' beschränkt ist, wie aus Teil (b) hervorgeht. 1P.

alternativ: Da f stetig ist und die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existieren, ist f glm stetig. vgl. Übungen

(d) Bestimmen Sie $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Minimum handelt. Geben Sie gegebenenfalls eine Minimalstelle an.

$\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$, 1P

wg. $f(0) = 0$ handelt es sich um ein Minimum. 1P.

(e) Bestimmen Sie $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Maximum handelt. Geben Sie gegebenenfalls eine Maximalstelle an.

$\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{e} \; (= e^{-1})$ 1P.

wird in $x_\pm = \pm 1$ angenommen(*), es liegt also ein Maximum vor. 1P

(*) vgl. Teil (a)

4. (5+3 P.) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert.

(i) Es ist für $n \geq 1$

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2x_n+1} - \sqrt{2x_{n-1}+1} = \frac{2(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{2x_n+1} + \sqrt{2x_{n-1}+1}}.$$ 1P.

Wg. $x_0 = 0 \leq 1 = x_1$ folgt induktiv, dass $x_{n+1} \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist, d.h. (x_n) ist monoton steigend. 1P.

(ii) $(x_n)_n$ ist nach oben beschränkt. 1P.

Denn: $x_0 \leq 3$ und aus $x_n \leq 3$ folgt, dass

$$x_{n+1} \leq \sqrt{2\cdot 3+1} = \sqrt{7} \leq 3$$ 1P.

(iii) Aus Monotonie und ~~Kon~~ Beschränktheit folgt Konvergenz. 1P.

Es gibt diverse Alternativen, z.B. kann man zur Begründung von (ii) eine andere obere Schranke wählen. Auch kann man zeigen, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

(b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Aus der Rekursionsformel folgt $x_{n+1}^2 = 2x_n + 1$.

Die Rechenregeln für Grenzwerte ergeben für $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, dass $x^2 = 2x+1$ bzw. $x^2 - 2x - 1 = 0$ 1P.

Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{2}$$ 1P.

Da alle $x_n \geq 0$ sind (Def. der $\sqrt{}$!), folgt

$$x = 1 + \sqrt{2}$$ 1P.

5. (2+3 P.) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ und $a_n^- = \max(-a_n, 0)$. Was können Sie über die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ aussagen, wenn

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert?

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und begründen Sie diese.

(a) Beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ konvergieren. (1P.)

Dies folgt mit dem Majorantenkriterium aus $a_n^{\pm} \leq |a_n|$. (1P.)

(b) Beide Reihen divergieren. (1P.)

Wir haben $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert, können nicht beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergieren. (1P.)

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-)$ konvergiert, kann nicht nur eine dieser Reihen konvergieren. Notwendig divergieren beide. (1P.)

6. (5×2 P.) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^3+3n)^2-n^6}{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6+6n^4+9n^2-n^6}{n^4}$ 1P.

$= \lim\limits_{n\to\infty} 6 + \frac{9}{n^2} = 6$ 1P.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}}$ 1P. (in der Form $a+ib$)

$= \frac{2}{2-1-i} = \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = 1+i$ 1P.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ 1P

$= e^{-2} \quad \left(= \frac{1}{e^2}\right)$ 1P.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\sqrt{1+x^2}) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{2y} \ln(1+y)$ 1P.

$= \frac{1}{2} \ln'(1) = \frac{1}{2}$ 1P

(Hier kann man auch 2x l'Hospital anwenden. Wird dieser Versuch unternommen, gibt's (für den Versuch bereits 1 P.) bei richtigem Ergebnis auch 2 P)

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\ln(1+x)}$

$\underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{1-\frac{1}{1+x}} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{(1+x)^2}} = 2$ 1P.

1P.

7. (3 + 3 (+4) P.) (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$$

Mit $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ haben wir nach Euler

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \text{1P.}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \qquad \text{1P.}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 4 \qquad \text{1P.}$$

(b) Welche Folgerungen über das Konvergenzverhalten dieser Potenzreihe ergeben sich aus Ihrem Ergebnis? (Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teil (a) *nicht* gelöst haben.)

- Divergenz der Reihe $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 4$ (bzw. R), 1P.
- absolute Konvergenz $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 4$ (bzw. R). 2P.

(wird der Zusatz 'absolut' vergessen, gibt's 1P Abzug.)

(c) Etwas schwieriger zu beantworten ist die Frage nach der Konvergenz der Reihe für z aus dem Rand des Konvergenzkreises. Dies sei daher als Zusatzaufgabe gestellt.

Ist $|z| = 4$ haben wir

$$|a_n z^n| = 4^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 4^n \cdot \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2(n-1)} \cdot \frac{n-1}{2(n-1)-1} \cdots \frac{1}{2}\,\frac{1}{1}$$

$$= 2^n \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2(n-1)-1} \cdot \frac{n-2}{2(n-2)-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2(n-1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \geq 1,$$

weil jeder Faktor größer als 1 ist. $(a_n z^n)_n$ ist also keine Nullfolge und die Reihe divergiert.