Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
21.07.2015

Klausur zu Analysis I

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkte Zahlenfolgen, so gilt

   $$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Für nichtleere, beschränkte Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ und $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$ gilt

   $$\sup A \cdot B \leq \sup A \cdot \sup B.$$

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{q + ir : q, r \in \mathbb{Q}\}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist periodisch.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Eine Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen ist genau dann eine Nullfolge, wenn gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k| : k \geq n\} = 0.$$

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(3+3 P.)** Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

   (b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

3. **(2+3+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(e^{3x}-1)$, (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x$.

4. **(2+6+3 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{4}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Berechnen Sie $f'(x)$ und zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.
   (b) Mit dem Ergebnis aus (a) zeige man, dass $(x_n)_n$ konvergiert. (Tipp: Mittelwertsatz.)
   (c) Berechnen Sie $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. **(2+4+4 P.)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, und geben Sie dazu insbesondere die von Ihnen benutzten Konvergenzkriterien an.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)}{n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$.

6. **(3+4 P.)** Untersuchen Sie, ob die Funktionen
   (a) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \ln(x)$
   und
   (b) $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := x\sin(\pi x)$
   gleichmäßig stetig sind.

7. **(2+2+2+2 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = 1 - (x^5 + 5x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.
   (b) Zeigen Sie, dass f genau drei kritische Stellen besitzt (die mit $x_1 < x_2 < x_3$ bezeichnet seien), und bestimmen Sie diese.
   (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f auf den Intervallen $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ und $[x_3, \infty)$.
   (d) Berechnen Sie $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 62 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!