Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
21.07.2015

Klausur zu Analysis I   Lösung

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Zur Konvergenz von Reihen)	6 Punkte
A3 (Grenzwerte)	10 Punkte
A4 (Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)	11 Punkte
A5 (Anwendung der Konvergenzkriterien für Reihen)	10 Punkte
A6 (Zur gleichmäßigen Stetigkeit)	7 Punkte
A7 (Extremwertaufgabe)	8 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 62 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkte Zahlenfolgen, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

. Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Für nichtleere, beschränkte Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ und $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$ gilt

$$\sup A \cdot B \leq \sup A \cdot \sup B.$$

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Die Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{q + ir : q, r \in \mathbb{Q}\}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist periodisch.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Eine Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen ist genau dann eine Nullfolge, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k| : k \geq n\} = 0.$$

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. (3+3 P.) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Die Aussage ist falsch. 1P.

Bsp. $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. 1P.

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach Leibniz und $|b_n| \leq 1$, also ist (b_n) beschränkt. Aber $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n}$, und die harmonische Reihe divergiert. 1P.

Bem.: Es gibt viele Gegenbeispiele. Alternativ: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = (-1)^n$, ...

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

Die Aussage ist richtig. 1P.

Bew.: Da (b_n) beschränkt ist, existiert $S > 0$, so dass $|b_n| \leq S$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} S|a_n|$.

Nun ist $|a_n b_n| \leq S|a_n|$ und das Majorantenkrit. liefert die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, das ist die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

2P.

3. **(2+3+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $= 0$ 1P.

denn $\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n+1} \cdot \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$

ln stetig $\overset{\downarrow}{=} 1 \cdot \ln(\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}) = \ln(1) = 0.$ 1P.

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$,

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{2^n}\right)^{2^n} \overset{N:=2^n}{=} \lim_{N\to\infty} \left(1+\frac{2}{N}\right)^N$$

$$= e^2$$ (jedes "=" 1 P.)

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^{3x}-1)$,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{1}$$ (nach l'Hospital) 1P.

$$= 3$$ 1P.

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$.

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-2x}{\cot(x)} \overset{\text{(l'Hospital)}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{(\cot)'(x)} = \dots$$ 1P.

weil $\cot'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$, also 1P.

$$\dots = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cdot\sin^2(x) = 2$$ 1P.

4. **(2+6+3 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{4}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ 1P.

Aus $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1+x^2}$ folgt $\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| \leq 1$

und damit $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$ 1P.

(b) Mit dem Ergebnis aus (a) zeige man, dass $(x_n)_n$ konvergiert. (Tipp: Mittelwertsatz)

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) \overset{MWS}{=} f'(\xi)(x_n - x_{n-1})$$ 1P.

Variante 1: Wir haben $x_1 = -\frac{1}{4} < 0 = x_0$. Wg $f'(\xi) > 0$ folgt $x_2 - x_1 = f'(\xi)(x_1 - x_0) < 0$ und weiter $x_3 - x_2 < 0, \ldots$ 1P.

allgemein $x_{n+1} - x_n < 0$, d.h. (x_n) ist monoton fallend 1P.

Es ist $-1 \leq x_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (-1 kann durch jedes $c \leq -1$ ersetzt werden.) 1P.

Begründung: Gilt für $n = 0$ nach Voraussetzung. Wenn $-1 \leq x_n \leq 0$, so folgt aus der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} - \frac{\sqrt{1+x_n^2}}{4} \geq -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \geq -1.$$ 1P.

Aus Monotonie und Beschränktheit folgt die Konvergenz der Folge. 1P.

Variante 2: s. S. 10

(c) Berechnen Sie $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Rechenregeln f. Grenzwerte bzw. die Stetigkeit von f ergeben $x = f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{4}$ 1P

$$\longrightarrow \frac{x}{2} \underset{(*)}{=} -\frac{\sqrt{1+x^2}}{4} \implies 2x = -\sqrt{1+x^2} \implies x^2 = \frac{1}{3} \implies x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$$ 1P.

Da nach (*) insbes. $x < 0$ sein muß, haben wir

$$x = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$ 1P.

Aufg. 4 (b), Variante 2:

Wir haben $|f'(\xi)| \leq \frac{3}{4}$ 1P.

und daher $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{3}{4} |x_n - x_{n-1}|$ 1P.

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist (x_n) eine Cauchy-Folge, 1P.

aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ also konvergent. 1P.

(Hier gibt's 1P. Bonus, wenn der ~~kürzere~~ Weg eingeschlagen wurde.)

5. **(2+4+4 P.)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, und geben Sie dazu insbesondere die von Ihnen benutzten Konvergenzkriterien an.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, Die Reihe konvergiert (absolut) 1P.

nach dem Wurzelkriterium, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ 1P.

auch nach dem Quotientenkrit., da $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^n \cdot \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in\frac{\pi}{2})}{n}$, $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 1P.

konvergiert nach dem verallgemeinerten Leibnizkrit., 2P.

aber nicht absolut konvergent, da $\sum \frac{1}{n}$ div. 1P.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$. Die Reihe ist absolut konvergent. 1P.

Mit $a_n = (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ haben wir

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$, 1P.

also $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$ 1P.

Die Beh. folgt also aus dem Quotientenkrit. 1P

6. **(3+4 P.)** Untersuchen Sie, ob die Funktionen

(a) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \ln(x)$

und

(b) $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := x \sin(\pi x)$

gleichmäßig stetig sind.

(a) Es ist $f'(x) = \frac{1}{x} \underset{x \geq 1}{\Rightarrow} |f'(x)| \leq 1$ (1P.) (1P.)

Der Schrankensatz ergibt, dass f glm. stetig ist. (1P.)

Ausführlicher: $|f(x) - f(y)| \underset{MWS}{=} |f'(\xi)|\,|x-y| \underset{S.O}{\leq} |x-y|$
(nicht gefordert!) $\Rightarrow$ f ist Lipschitz-, also insbes. glm. stetig.

(b) Beh.: g ist nicht glm. stetig. 1P.

Bew.: Wir setzen $y_n = n + \frac{1}{n}$ und $x_n = n$, so dass 1P.

$\lim_{n \to \infty} x_n - y_n = 0$. Andererseits ist

$$|g(x_n) - g(y_n)| = |g(y_n)| = (n + \tfrac{1}{n})\,|\sin(n\pi + \tfrac{\pi}{n})|$$

$$= (n + \tfrac{1}{n}) \cdot \sin(\tfrac{\pi}{n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi \neq 0$$ 1P.

(denn: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$)

Nach dem Folgenkrit. für glm. Stetigkeit folgt die Beh. 1P.

7. **(2+2+2+2 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = 1 - (x^5 + 5x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

(b) Zeigen Sie, dass f genau drei kritische Stellen besitzt (die mit $x_1 < x_2 < x_3$ bezeichnet seien), und bestimmen Sie diese.

(c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f auf den Intervallen $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ und $[x_3, \infty)$.

(d) Berechnen Sie $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(a) $f'(x) = (-5x^4 - 15x^2)e^{-x^2/2} + (x^6 + 5x^4)e^{-x^2/2}$ 1P.

$= x^2(x^4 - 15)e^{-x^2/2}$ $\left(= (x^6 - 15x^2)e^{-x^2/2}\right.$ ist ok.$\left.\right)$ 1P.

(b) $f'(x) = 0 \iff x^2(x^4 - 15) = 0$ und dies ist für $x_2 = 0$ offenbar der Fall. 1P.

Ferner hat man $x_{1,3} = \mp \sqrt[4]{15}$ 1P.

(c) streng monoton steigend auf $(-\infty, x_1]$ und auf $[x_3, \infty)$ 1P.

streng monoton fallend auf $[x_1, x_2]$ und auf $[x_2, x_3]$, also auf $[x_1, x_3]$ 1P.

(d) (Nach den Vorüberlegungen und wg. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ ist)

$\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(-\sqrt[4]{15}) = 1 + \sqrt[4]{15}(15 + 5\sqrt{15})e^{-\frac{\sqrt{15}}{2}}$ 1P

und $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(\sqrt[4]{15}) = 1 - \sqrt[4]{15}(15 + 5\sqrt{15})e^{-\frac{\sqrt{15}}{2}}$ 1P.