Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
02.10.2015

# 2. Klausur zu Analysis I

Lösung + Wertung

**Allgemeine Hinweise:** Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

| | |
|---|---|
| A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen) | 10 Punkte |
| A2 (Zur Konvergenz von Reihen) | 6 Punkte |
| A3 (Grenzwerte) | 10 Punkte |
| A4 (Exponential- und trigonometrische Funktionen) | 9 Punkte |
| A5 (Konvergenz einer Potenzreihe) | 10 ~~5 (+5)~~ Punkte |
| A6 (Rechnen mit komplexen Zahlen) | 8 Punkte |
| A7 (Extremwertaufgabe) | 11 Punkte |

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 64 ~~59 (+5)~~ erreichbaren) Punkten als bestanden, für Neben- fächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Zahlenfolge und $R$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so gilt $R \geq 1$.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist jede Teilfolge einer beschränkten reellen Zahlenfolge konvergent.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Umkehrfunktion einer streng monotonen, gleichmäßig stetigen Funktion ist ebenfalls gleichmäßig stetig.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Unter der Vollständigkeit der reellen Zahlen versteht man, dass jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(3+3 P.)** Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Diese Behauptung ist falsch. 1P.

Gegenbsp.: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 1P

Dann ist $\sum a_n$ konvergent nach Leibniz, insbes $(a_n) = (b_n)$ eine Nullfolge, aber $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n} = \infty$.
1P.

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

1P.
Diese Aussage ist richtig,

denn: Ist $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so ist die Folge $(b_n)$ insbes.
1P.
beschränkt.

Ist $S$ eine obere Schranke von $(|b_n|)$, so gilt $|a_n b_n| \leq |a_n| S$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot S$ konvergiert nach Vor.. Also folgt die Beh. aus dem Ma-
1P.
jorantenkrit.

3. **(2+3+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3 - x^3}{(x+1)^2}$,

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 3 \quad 1P.$$

1P.

(b) $\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n))$, mehrere Lösungsmöglichkeiten:

1. MWS: $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{\xi}$, $\xi \in [n, n+1] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\xi} = 1$

2. Rechenregeln für ln: $\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n\to\infty} \ln((1+\frac{1}{n})^n)$ 1P.

$= \ln(\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n) = \ln(e) = 1$ 1P.

ln stetig 1P.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$,

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad 1P.$$

$$= \frac{3}{2} \quad 1P.$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$.

Lös. mit l'Hospital: $\lim_{x\to 0} \ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2}$ 1P.

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x}$ 1P. $= -\frac{1}{6}$ 1P.

Alt.: Taylorformel wie in der Vorlesung erklärt.

---

3. Lösung zu (b): $\lim_{n\to\infty} \ldots = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(\frac{1}{x})\right)$ 1P.

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$ 1P.

1P. l'Hospital

4. **(6+3 P.)** Unter Verwendung der Eulerschen Formel oder der Additionstheoreme beweise man

   (i) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$,

   (ii) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

   Anwendung: Berechnen Sie - ausgehend von $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ - die exakten Werte von $\cos(\frac{\pi}{6})$ und $\sin(\frac{\pi}{6})$.

Lös. von (i) mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\cos(3x) = \cos(x+2x) \underset{\text{Add.}}{=} \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \qquad 1P.$$

$$\underset{\text{Add.}}{=} \cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \sin(x)\cdot 2\sin(x)\cos(x) \qquad 1P.$$

$$\underset{\text{Pyth.}}{=} \cos(x)(2\cos^2(x) - 1) - 2\cos(x)(1-\cos^2(x)) \Rightarrow \text{Beh.} \qquad 1P.$$

(ii) analog. Einfacher führt die Euler-Formel zum Ziel:

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3$$

$$= \cos^3(x) + 3i\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) - i\sin^3(x)$$

Für den Realteil ergibt der Pythagoras

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x),$$

was (i) ist. Analog erhält man (ii) aus dem Vergleich der Imaginärteile.

Anwendung: $0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{6})$

$$\underset{(i)}{=} 4\cos^3(\tfrac{\pi}{6}) - 3\cos(\tfrac{\pi}{6}) \qquad 1P.$$

Da $\cos(\frac{\pi}{6}) > 0$, folgt $\cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$ bzw. $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1P.

Pythagoras: $\sin^2(\frac{\pi}{6}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$ und wg. $\sin(\frac{\pi}{6}) > 0$

folgt $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 1P.

5. **(3+2(+5) P.)** (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n)^{n+1}} z^n.$$

- Verwendung von Cauchy-Hadamard bzw. Betrachtung von $\sqrt[n]{|a_n|}$: 1P.
- Rechnung: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+1}{2n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} \longrightarrow \frac{1}{2}$ 1P.
- Folgerung: $R = 2$ 1P.

(b) Welche Folgerungen über das Konvergenzverhalten dieser Potenzreihe ergeben sich aus Ihrem Ergebnis? (Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teil (a) *nicht* gelöst haben.)

- Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ $(=2)$ 1P.
- absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ $(=2)$ 1P.
  (wenn der Zusatz "absolut" vergessen wurde, gibt's hierfür nur $\frac{1}{2}$ P.)

(c) Etwas schwieriger zu beantworten ist die Frage nach der Konvergenz der Reihe für $z$ aus dem Rand des Konvergenzkreises. Dies sei daher als Zusatzaufgabe gestellt.

(i) Für $z = 2$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$ zu betrachten, und diese Reihe divergiert 1P
nach dem Majorantenkrit., da $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ ist. 1P.

(ii) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ mit $|z| = 2$ ist die Reihe konvergent. 1P.
(Nicht absolut konvergent, aber das ist klar nach (i).)
Dies folgt aus dem verallgemeinerten Leibnizkrit.,
da $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$ eine monoton fallende Nullfolge ist 1P.

Begründung der letzten Aussage: $|a_n| \leq \frac{C}{n} \Rightarrow$ Nullfolge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < 1 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$ 1P.

6. **(2+2+4 P.)**

(a) Für die komplexe Zahl $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ bestimme man $\frac{1}{z}$ in Polardarstellung und in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad 1P$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad 1P$$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

(b) Stellen Sie die folgende komplexe Zahl $z$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z = \frac{2i-1}{1+3i} = \frac{(2i-1)}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{1}{10}(2i-1)(1-3i)$$

$$= \frac{1}{10}(2i-1+6+3i) = \frac{1+i}{2} \qquad 2P.$$

(Wer sich daran erinnert, mit dem komplex konjugierten zu erweitern, erhält bereits 1P.)

(c) Geben Sie (ohne Beweis) alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$ an.

$$\mathbb{L} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \leftarrow \text{alt.} \rightarrow e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Wertung: Nur Ergebniskorrektheit in (c), jede richtige Lösung gibt 1P.

7. **(3+4+4 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x + 1$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen dieser Funktion.

(b) In welchen Fällen handelt es sich um lokale Maximalstellen bzw. Minimalstellen? Sind diese isoliert?

(c) Bestimmen Sie $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ sowie $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und untersuchen Sie, ob $f$ ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt.

Lös.: (a) Wir haben $f'(x) = 3e^{3x} - 12e^{2x} + 9e^x$ 1P

$$( = 3e^x(e^{2x} - 4e^x + 3).)$$

Setzen wir $y = e^x$, so gilt $f'(x) = 0 \iff y^2 - 4y + 3 = 0$ 1P.

Lösung der quadratischen Gleichung ergibt: $\iff y \in \{1, 3\}$,

Rücksubst.: $x \in \{0, \ln(3)\}$ sind die kritischen Stellen. 1P.

(b) $f''(x) = 9e^{3x} - 24e^{2x} + 9e^x$ 1P.

$$( = 3e^x(3e^{2x} - 8e^x + 3)$$

$x = 0 \Rightarrow f''(x) = 9 - 24 + 9 = -6 < 0$,

Hier liegt eine lokale Maximalstelle vor. 1P.

$x = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow f''(x) = 9(27 - 24 + 3) > 0$

Hier ist eine lokale Minimalstelle. 1P.

Zusatzfrage: In beiden Fällen ja. 1P.

(c) Es ist $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, 1P.

ein Maximum wird also nicht angenommen. 1P.

Ferner ist $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ und $f(\ln(3)) = \ldots$

$= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$, 1P.

also $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(\ln(3)) = 1$ 1P.