Lösung und Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

SoSe 2016
25.07.2016

Klausur zu Analysis I

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Endliche Summen und Produkte)	6 Punkte
A3 (Grenzwerte)	13 Punkte
A4 (Ableitungen)	10 Punkte
A5 (Anwendung der Konvergenzkriterien für Reihen)	10 Punkte
A6 (Mittelwertsatz und Anwendungen)	10 Punkte
A7 (Extremwertaufgabe)	11 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 70 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Die Menge der Häufungswerte einer beschränkten Folge reeller Zahlen besitzt ein größtes Element.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

   Vorl., Abschnitt 2.5.1, Satz 1

   (b) Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

   Vorl., Abschnitt 4.1, Satz 4

   (c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

   Majorantenkrit., vgl. A 28

   (d) Die Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ besitzt in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ keine Nullstellen.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

   vgl. A 40

   (e) Jede differenzierbare Funktion ist gleichmäßig stetig.

   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

   Bsp. $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

2. **(6 P.)** Von den nachstehenden Identitäten sind drei falsch und drei richtig. Geben Sie an, welche *falsch* sind, und belegen Sie Ihre Entscheidung anhand je eines (möglichst einfachen) Beispiels.

(a) $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_{n-k}$ (b) $\prod_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \prod_{k=0}^{n} a_k + \prod_{k=0}^{n} b_k$

(c) $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ (d) $\prod_{k=0}^{n} a_k b_k = \prod_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

(e) $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big)$ (f) $\prod_{k=0}^{n} a_k b_k = \Big(\prod_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\prod_{k=0}^{n} b_k\Big)$

(b) ist falsch 1P.

Bsp. $n=1$, $a_0 = a_1 = 1 = -b_0 = -b_1$. Dann ist

linke Seite $= 0$, rechte Seite $= 2$ 1P.

(viele andere Bspe. möglich!)

(c) ist falsch 1P

Bsp. $n=1$, $a_0 = b_0 = 0$, $a_1 = b_1 = 1$. Dann

ist linke Seite $= 1$, rechte Seite $= 0$ 1P

(e) ist falsch 1P.

Bsp. $n=1$, $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1$

linke Seite $= 2$, rechte Seite $= 4$ 1P

(auch zu (c) und (e) sind viele andere Beispiele möglich!)

3. **(2+3+3+2+3 P.)** Berechnen Sie die folgenden - möglicherweise uneigentlichen - Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} 3^{-k}$, $\quad = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ (geometrische Reihe) 1P.

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \qquad 1P.$$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, $\quad = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 1P.

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \; 1P \quad = \frac{1}{e}\cdot e = 1 \; 1P$$

(alt.: $\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n\geq N_\varepsilon: \left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1. \Rightarrow e^{-\varepsilon}\leq \lim \leq 1.$)

(c) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $\quad = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$ 1P

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} \qquad 1P$$

$$= \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \qquad 1P.$$

(d) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}$ nach l'Hospital

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \; 1P \qquad = 2 \; 1P.$$

(e) $\lim_{x\to 0} x^x$. $\quad x^x = \exp(x\cdot\ln(x))$ (Def.) 1P

Aus der Vorl. bekannt: $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x) = 0$ 1P.

Da exp stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1 \qquad 1P.$$

4. **(3+3+4 P.)** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $\log_{10} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert als die Umkehrfunktion von

$\exp_{10} : \mathbb{R} \to (0,\infty), x \mapsto \exp_{10}(x) := 10^x$;

$$\log_{10}'(x) = \frac{1}{\exp_{10}'(\log_{10}(x))}$$ (Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion) 1P

und $\exp_{10}'(x) = \frac{d}{dx} \exp(x \cdot \ln(10)) = \ln(10) \cdot \exp_{10}(x)$ 1P.

Zsf.: $\log_{10}'(x) = \frac{1}{\ln(10)\, x}$ 1P

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \exp(\sin(\sqrt{1+x^2}))$;

$$\frac{d}{dx} \exp(\sin(\sqrt{1+x^2})) = \exp(\sin(\sqrt{1+x^2})) \cdot \frac{d}{dx} \sin(\sqrt{1+x^2})$$ 1P.

$$= \exp(\sin(\sqrt{1+x^2})) \cdot \cos(\sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2}$$ 1P

$$= \exp(\sin(\sqrt{1+x^2})) \cdot \cos(\sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ 1P.

(c) $f : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & : \quad \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & : \quad \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Für $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ 2P.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(h^2 \cdot \sin(\tfrac{1}{h}) - 0 \right) = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin(\tfrac{1}{h})$$ 1P

$= 0$, da $|h \sin(\frac{1}{h})| \leq |h| \to 0 \quad (h \to 0)$
1P.

Hinweis zu (c): Beachten Sie, dass die Ableitungsregeln für $x_0 = 0$ nicht anwendbar sind.

5. **(2+2+6 P.)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, und geben Sie dazu insbesondere die von Ihnen benutzten Konvergenzkriterien an.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$, $\quad \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n^3}$ 1P.

Die (absolute) Konvergenz folgt aus dem Majoranten-krit. 1P

(alt. Majoranten: $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n^2}$, ggf. andere)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$, mit $a_n = \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$ haben wir

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \cdot \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}$$ 1P.

Die Reihe konvergiert (abs.) nach dem Wurzelkrit. 1P.

(alt.: Quotientenkrit.)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n!}}$.

Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium. 1P.

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ ist aus der Vorl. bekannt. 1P

Monotonie: $\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \iff \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n+1]{(n+1)!}$

$\iff (n!)^{n+1} \leq ((n+1)!)^n \; (= (n!)^n \cdot (n+1)^n) \iff n! \leq (n+1)^n$;

Letzteres folgt aus $n! \leq n^n$. 2P.

Die Reihe ist nicht absolut konvergent, 1P

da $n! \leq n^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$

und die harmonische Reihe divergiert 1P.

6. (2+4+4 P.) Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) genau an

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b), 1P.

so existiert $\xi\in(a,b)$ so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. 1P.

und beweisen Sie

(a) für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$ die Ungleichungen $(x-y)e^y < e^x - e^y < (x-y)e^x$,

Nach dem MWS ex. $\xi\in(y,x)$, so dass

$$e^x - e^y = e^\xi(x-y)$$ 1P

Daher folgt die behauptete Ungleichungskette aus

$(x-y)e^y < (x-y)e^\xi < (x-y)e^x \quad \forall\, \xi\in(y,x)$ 1P.

Division durch $x-y>0$ reduziert dies auf

$$e^y < e^\xi < e^x \quad \forall\, \xi\in(y,x),$$ 1P

was wg $y<\xi<x$ aus der strikten Monotonie der Exponentialfunktion folgt. 1P.

(b) die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $\quad x \to f(x) := \ln(\ln(x))$.

Wir haben $f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(x)}$. 1P

Da ln monoton steigt, ist f' monoton fallend, 1P

so dass $0\le f'(x)\le\frac{1}{2\ln(2)} \quad \forall x\ge 2$ 1P.

Damit ist für $x,y\ge 2$: $|f(x)-f(y)|\underset{MWS}{\le}\frac{1}{2\ln(2)}|x-y|$,

d.h. f ist Lipschitz-, insbes. glm. stetig. 1P.

(Für den letzten Schritt reicht es auch, den Schrankensatz anzuführen.)

7. (7+4 P.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \dfrac{\exp\left(\frac{x}{4}\right)}{1+\frac{x^2}{7}}$.

   (a) Zeigen Sie durch Untersuchung *allein der ersten* Ableitung, dass f genau ein isoliertes lokales Maximum und genau ein isoliertes lokales Minimum besitzt. Bestimmen Sie deren Lage.

   (b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema aus Teil (a) um globale Extrema? Formulieren Sie jeweils eine Aussage und begründen Sie diese.

(a) Nach der Quotientenregel haben wir

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{7})^2}\left(\frac{1}{4}e^{x/4}\left(1+\frac{x^2}{7}\right) - e^{x/4}\cdot\frac{2x}{7}\right) \qquad 1P.$$

$$= \frac{1}{4\cdot 7}\frac{e^{x/4}}{(1+\frac{x^2}{7})^2}\left(x^2 - 8x + 7\right) \qquad 1P.$$

Nun ist $x^2 - 8x + 7 = 0 \iff x \in \{4 \pm \sqrt{16-7}\} = \{1, 7\}$ 1P

und daher

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff x^2 - 8x + 7 \gtreqless 0 \iff (x-1)(x-7) \gtreqless 0,$$

d.h. $f'(x) > 0 \iff x < 1$ oder $x > 7$ 1P

und $f'(x) < 0 \iff 1 < x < 7$ 1P

Es folgt: f ist streng monoton steigend auf $(-\infty, 1]$ und auf $[7, \infty)$. f ist streng monoton fallend auf $[1, 7]$. 1P

$\leadsto$ In $x_1 = 1$ besitzt f ein isoliertes lokales Maximum, in $x_2 = 7$ besitzt f ein isoliertes lokales Minimum, und weitere Extrema gibt es nicht. 1P.

(b) In x_1 liegt kein globales Max. vor, 1P

da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. 1P

In x_2 liegt kein globales Min. vor, 1P

da $f(x_2) > 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. 1P.