Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
27.09.2016

2. Klausur zu Analysis I

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Extremwertaufgabe)	6 Punkte
A3 (Grenzwerte)	9 Punkte
A4 (Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)	9 Punkte
A5 (Anwendung der Konvergenzkriterien für Reihen)	15 Punkte
A6 (Mittelwertsatz mit Anwendungen)	16 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 65 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abzählbarer Bildmenge $f(\mathbb{R})$ ist konstant.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so liegt zwischen zwei Nullstellen von f stets eine Nullstelle von f'.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum, so ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = 0$.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. (6 P.) Für $x > 0$ sei $f(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x}$. Zeigen Sie, dass f ein isoliertes globales Minimum annimmt, und berechnen Sie dessen Lage und Wert.

Version 1: Wir haben $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ 1P.

und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2$ 1P.

Ebenso sehen wir: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ und $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. 1P.

Mit dem Monotoniesatz folgt: f ist streng monoton fallend auf $(0,2]$ und streng monoton steigend auf $[2,\infty)$. 1P

Also besitzt f in $x_0 = 2$ ein isoliertes globales Minimum. 1P

$f(x_0) = 4 + 4 + 4 = 12$ 1P

Version 2: $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ 1P.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 2 =: x_0$ 1P. } wie oben

$f''(x) = \frac{16}{x^3}$ $(> 0 \;\; \forall x \in (0,\infty))$ 1P.

Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2$ 2P.

(mit ξ zwischen x_0 und x) $= f(2) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(2) \;\; \forall x \in (0,\infty) \setminus \{2\}$

$f(2) = 12$ 1P (wie oben)

Version 3: $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ 1P.

$f'(x) = 0 \iff x = 2 =: x_0$ 1P.

$f''(x) = \frac{16}{x^3} > 0$, insbes. $f''(2) > 0$. 1P.

Also liegt in $x_0 = 2$ ein isoliertes lokales Minimum vor. 1P.

Da ansonsten keine lokalen Extrema existieren und $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, handelt es sich um ein globales Minimum. 1P.

$f(2) = 12$ 1P.

3. **(2+2+2+3 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^3+3n)^3-n^9}{n^7}$, $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^7}\left(3\cdot(n^3)^2\cdot 3n + 3n^3(3n)^2 + (3n)^3\right)$ 1P

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^7}\left(9n^7 + 27n^5 + 27n^3\right) = 9$ 1P.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$, $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)^n = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$ 1P

$= e^2$ 1P.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$ 1P.

und wg der Stetigkeit der e-Funktion

$\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \exp(1) = e$ 1P.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{\sin(x^2)}$. (Lösung durch zweifache Anwendung von l'Hospital)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{4\sin(4x)}{2x\cos(x^2)}$ 1P.

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(4x)}{x}$ 1P. (weil: $\cos(x^2)\to 1$ $(x\to 0)$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{8\cos(4x)}{1} = 8$ 1P.

4. **(6+3 P.)** Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{1+x_n^2}$. Untersuchen Sie, ob diese Folge konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

1. Konvergenzuntersuchung.

Beh.: Die Folge ist konvergent. 1P.

Begründung: Für die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder haben wir

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x_n^2} - \sqrt{1+x_{n-1}^2}\right) \qquad 1P.$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{\sqrt{1+x_n^2}+\sqrt{1+x_{n-1}^2}} = \frac{1}{3}\,\underbrace{\frac{x_n + x_{n-1}}{\sqrt{1+x_n^2}+\sqrt{1+x_{n-1}^2}}}_{(*)}\,(x_n - x_{n-1}) \qquad 1P.$$

Variante 1: Hieraus folgt, da $0 \le (*) \le 1$, dass

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}| \qquad 1P.$$

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist daher $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge und somit in $\mathbb{R}$ konvergent. 1P + 1P.

Variante 2: Wir haben $x_0 = 0 < \frac{1}{3} = x_1$ und da $(*) \ge 0$ ist, ist (x_n) monoton steigend (Induktion) 1P

Ferner ist $0 \le x_n \le 1$, was klar ist für $n=0$, und aus $0 \le x_n \le 1$ folgt $0 \le x_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{1+x_n^2} \le \frac{\sqrt{2}}{3} \le 1$. 1P.

Aus Monotonie und Beschränktheit folgt Konv. 1P.

2. Grenzwertberechnung: Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann folgt (aus den Rechenregeln f. Grenzwerte und der Stetigkeit der $\sqrt{\ }$), dass $x = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}$ 1P

$$\Rightarrow \quad 9x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in \frac{\pm 1}{\sqrt{8}} \qquad 1P.$$

Da stets $x_n \ge 0$, kommt das "$-$"-Zeichen nicht in Frage, also $x = \frac{1}{\sqrt{8}}$. 1P.

5. (4+6+5 P.) Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren. Begründen Sie Ihre Ergebnisse, und geben Sie dazu insbesondere die von Ihnen benutzten Konvergenzkriterien an.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} z^n$, Es handelt sich um eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R=4$ (Cauchy-Hadamard oder Euler) 1P.

$\Rightarrow$ • Die Reihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 4$. 1P.

• Die Reihe divergiert $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 4$. 1P

• Ist $|z| = 4$, so ist $\left(\frac{n z^n}{4^n}\right)_n$ keine Nullfolge, und die Reihe divergiert. 1P.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, Konvergenzradius $R = 1$ 1P.

$\Rightarrow$ abs. Konvergenz, falls $|z| < 1$, Divergenz für $|z| > 1$; 2P.

Divergenz für $z = 1$ (harmonische Reihe); 1P.

Konvergenz nach Leibniz $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$, 1P.

für diese z ist die Konvergenz nicht absolut (wg. der Divergenz der harmonischen Reihe.) 1P.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$. Beh.: Die Reihe konvergiert absolut für solche $z = x + iy$, für die $x < 0$ ist, 1P

und divergiert, falls $x \geq 0$ ist. 1P.

Die Konvergenzaussage folgt aus dem Quotientenkrit., da

$$\left|\frac{e^{(n+1)z}}{e^{nz}}\right| = |e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \qquad 2P.$$

Für $x \geq 0$ ist $|e^{nz}| = e^{nx} |e^{iny}| = e^{nx}$, also $(e^{nz})_n$ keine Nullfolge und dies impliziert die Divergenzaussage. 1P.

6. **(2+3+2+2+5+2 P.)** Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) genau an.

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und d'bar auf (a,b). 1P

Dann ex. $\xi \in (a,b)$, so dass $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ 1P

Nun sei $\varepsilon \in (0,1)$ und, für $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^\varepsilon \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\varepsilon}{k})$. Zeigen Sie:

(a) $(n+1)^\varepsilon - n^\varepsilon > \varepsilon(n+1)^{\varepsilon-1}$,

(b) $(a_n)_n$ ist streng monoton wachsend,

(c) für alle $x \in (-1,0)$ ist $\ln(1+x) \leq x$,

(d) $\ln(a_n) \leq 0$,

und folgern Sie,

(e) dass $(a_n)_n$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n \in [1-\varepsilon, 1]$.

(a) Für $x>0$ sei $f(x) = x^\varepsilon$. Dann ist $f'(x) = \varepsilon x^{\varepsilon-1}$. 1P.

Also: $(n+1)^\varepsilon - n^\varepsilon = f(n+1) - f(n) \overset{MWS}{=} f'(\xi) = \varepsilon \xi^{\varepsilon-1}$ 1P.

für ein $\xi \in (n, n+1)$, also mit $\xi^{\varepsilon-1} > (n+1)^{\varepsilon-1}$, was wg $\varepsilon - 1 < 0 < \varepsilon$ die behauptete Ungl. ergibt. 1P.

(b) $a_{n+1} - a_n > 0 \iff (n+1)^\varepsilon \prod_{k=1}^{n+1}(1-\frac{\varepsilon}{k}) - n^\varepsilon \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\varepsilon}{k}) > 0$

$\iff (n+1)^\varepsilon (1-\frac{\varepsilon}{n+1}) - n^\varepsilon > 0$ 1P.

$\iff (n+1)^\varepsilon - n^\varepsilon > \varepsilon (n+1)^{\varepsilon-1}$, folgt also aus (a). 1P.

(c) $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1) \overset{MWS}{=} \ln'(\xi) \cdot x$

$= \dfrac{1}{1+\xi} \cdot x$ mit einem $\xi \in (x,0)$. 1P.

Da $x<0$, $\xi<0$ (und also $\frac{1}{1+\xi} > 1$), folgt

$\frac{1}{1+\xi} \cdot x < x$ und damit die Beh. 1P.

(d) Die Rechenregeln für den ln ergeben

$$\ln(a_n) = \ln\Big(n^{\varepsilon} \prod_{k=1}^{n} \big(1-\tfrac{\varepsilon}{k}\big)\Big)$$

$$= \varepsilon \cdot \ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\big(1-\tfrac{\varepsilon}{k}\big) \qquad 1P.$$

$$\underset{(c)}{\leq} \varepsilon \Big(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big) \qquad 1P.$$

teleskopieren

$$= \varepsilon \Big(\sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k-1) - \tfrac{1}{k}\big) - 1 \Big) \qquad 1P.$$

MWS, $\xi_k \in (k-1, k)$

$$= \varepsilon \Big(\sum_{k=2}^{n} \big(\tfrac{1}{\xi_k} - \tfrac{1}{k}\big) - 1 \Big) \qquad 1P$$

$$\leq \varepsilon \Big(\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \big(\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\big)}_{=1,\ \text{siehe Vorl.}} - 1 \Big) = 0 \qquad 1P.$$

(e) Nach (d) sind alle $a_n \leq 1$ und aus Monotonie (Teil (b)) und Beschränktheit folgt die Konvergenz. 1P.

Genauer haben wir

$$1-\varepsilon = a_1 \underset{(b)}{<} a_n \underset{(d)}{\leq} 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

und die Ungleichungen bleiben bei Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten. 1P.