

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

1. Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem auf  $X$ . Beweisen Sie die de Morgan'schen Regeln:

$$(a) \left( \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M^c,$$

$$(b) \left( \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M^c.$$

2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten. Hierbei sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $\mathcal{N}$  ein Mengensystem auf  $Y$ .

$$(a) f^{-1}\left(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N\right) = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} f^{-1}(N),$$

$$(b) f^{-1}\left(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N\right) = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} f^{-1}(N).$$

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$(a) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

4. Man berechne  $1 + 3$ ,  $1 + 3 + 5$  und  $1 + 3 + 5 + 7$ , leite eine allgemeine Formel für

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

her und beweise diese durch Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ .

**Abgabe:** Fr., 29.04.2016, 10:25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 04.05.2016 und Fr., 06.05.2016 (im Tutorium, für die Donnerstags-Gruppen)