Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
29.04.2016
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

Für natürliche Zahlen n und p sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

5. Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie, dass $s_n(4) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

(*Hinweis*: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 3!)

6. Zeigen Sie: Zu jedem $q \geq 1$ existieren rationale Zahlen $a_{k,q}$, $1 \leq k \leq q-1$, so dass

$$s_n(q) = \frac{1}{q+1} n^{q+1} + \frac{1}{2} n^q + \sum_{k=1}^{q-1} a_{k,q} n^{q-k}.$$

7. Durch Aufspalten von $s_{2n}(p)$ in Beiträge von geraden und ungeraden Indices zeige man die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^p = s_{2n}(p) - 2^p s_n(p).$$

Was ergibt sich hieraus für $p \in \{2, 3\}$, wenn Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 3 verwenden? (Anmerkung: Für $p = 1$ sollten Sie wieder Ihr Ergebnis aus Aufgabe 4 erhalten.)

8. Für komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind Addition und Multiplikation gegeben durch

$$z + w = (x+u) + i(y+v)$$

und

$$zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Zeigen Sie, dass hierfür das Assoziativgesetz der Multiplikation (K5) und das Distributivgesetz (K9) gelten. Geben Sie dabei an, an welcher Stelle Sie die Definitionen und die Körperaxiome für die reellen Zahlen verwenden.

Abgabe: Fr., 06.05.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 11.05.2016 und Do., 12.05.2016