Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
20.05.2016
Blatt 5

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

17. Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Ist (x_n) monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 aus Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschließende Bemerkung benutzen.

18. Es seien $p \geq 2$ eine natürliche und $a > 0$ sowie $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Für $n \geq 2$ sei x_n rekursiv definiert durch

$$x_n := \frac{1}{p}\left((p-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{p-1}}\right).$$

Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass $x_n > 0$ gilt, sowie

(a) $x_n = x_{n-1}\left(1 + \frac{1}{p}\left(\frac{a}{x_{n-1}^p} - 1\right)\right)$, (b) $x_n^p \geq a$, (c) $(x_{n+1} - x_n)x_n^{p-1} \leq 0$.

Folgern Sie, dass (x_n) gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^p = a$ konvergiert.

Hinweis zu (b): Bernoullische Ungleichung.

19. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n^* = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge (e_n^*) streng monoton fallend ist.

20. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $c \in \mathbb{C}^*$ besitzt die Gleichung $z^2 = c$ (in $\mathbb{C}$) genau zwei Lösungen.

(b) Jede quadratische Gleichung

$$w^2 + \lambda w + \mu = 0$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ besitzt die Lösungen $w_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}$, wobei $\pm\sqrt{c}$ die Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ aus Teil (a) bezeichnet. Weitere Lösungen gibt es nicht.

Hinweis zu (a): Schreiben Sie $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, entsprechend $c = a + ib$, leiten ein System von zwei Gleichungen für die reellen Unbekannten x und y her und lösen dieses.

Abgabe: Fr., 27.05.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 01.06.2016 und Do., 02.06.2016