

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

21. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \quad p \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, \quad a \in \mathbb{R}^+$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p}, \quad p \in \mathbb{N}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$

Hinweis zu (d): Sandwich-Theorem

22. Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n,$

(b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für das in (a) $<$ und in (b) $>$ gilt. Leiten Sie ferner entsprechende Ungleichungen für $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ her.

Hinweis: Bereits für Teil (b) beachte man $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-c_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n.$

23. Die b -adische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k}, \quad a_k \in \{0, \dots, b-1\}$$

einer reellen Zahl $x \in [0, 1]$ heißt *periodisch*, falls $k_0 \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_{k+l} = a_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall x rational ist.

Anleitung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe zeige man die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{b^l}{b^l - 1} \sum_{k=k_0}^{k_0+l-1} \frac{a_k}{b^k}.$$

24. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}), \quad (n \geq 1).$$

Die Startwerte a_0 und a_1 seien vorgegeben. Zeigen Sie, dass die Folge für jede Wahl der Startwerte konvergiert, und berechnen Sie

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

in Abhängigkeit von a_0 und a_1 .

Hinweis: Betrachten Sie die Differenzen $\Delta_n := a_{n+1} - a_n$. Für die Berechnung des Grenzwerts ist die geometrische Reihe nützlich.

Abgabe: Fr., 03.06.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 08.06.2016 und Do., 09.06.2016