

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

25. Bestimmen Sie die 12-adischen Entwicklungen von $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{7}$. Vollziehen Sie dazu den Beweis von Satz 4 in Abschnitt 2.5.3 der Vorlesung nach. Für die „Ziffern“ 10 und 11 können Sie gegebenenfalls die Symbole a und b verwenden.

26. (a) Die Folge $(f_n)_n$ der *Fibonacci-Zahlen* ist durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

rekursiv definiert. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$

indem Sie die Partialsummen $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f_k f_{k+2}}$ als Teleskopsummen $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})$ mit geeigneten a_k darstellen.

(b) In ähnlicher Weise berechne man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}.$$

27. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für vier der nachstehenden fünf Folgen (a_n) auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$(a) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \qquad (b) \quad a_n = \frac{(1+i)^n}{n^2} \qquad (c) \quad a_n = \frac{i^{(n^2)}}{n}$$

$$(d) \quad a_n = \frac{(3+4i)^n}{5^n \sqrt[999]{n}} \qquad (e) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

Bitte wenden!

28. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist auch

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und (b_n) eine Nullfolge, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und (b_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, so ist

auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(d) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und (b_n) beschränkt, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

Abgabe: Fr., 10.06.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 15.06.2016 und Do., 16.06.2016