Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
10.06.2016
Blatt 8

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

**29.** Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $n, N \in \mathbb{N}_0$ gilt die Identität $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N+k}{k} = \binom{N+1+n}{n}$.

(b) Für $N \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist

$$\frac{1}{(1-z)^{N+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n}{n} z^n.$$

*Hinweis zu* (b): Cauchy-Produkt von Reihen.

**30.** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n} z^{4n}$

Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

*Hinweis*: Beachten Sie, dass es sich in Teil (b) um eine sogenannte „Lückenreihe" handelt, bei der unendlich viele $a_n = 0$ sind. Hier ist die Eulersche Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar, auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

**31.** Was können Sie über den Konvergenzradius $R$ einer Potenzreihe $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ aussagen, wenn deren Koeffizientenfolge $(a_n)_n$ einer der folgenden Bedingungen genügt?

(a) Es existieren $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq C(n+1)^N$.

(b) Es existieren $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}_0$ und eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|a_{n_k}| \geq \varepsilon n_k^{-N}$ besteht.

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese! Was ergibt sich in dem Spezialfall, dass $(a_n)_n$ beschränkt aber keine Nullfolge ist?

**32.** Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n,$$

wobei die $f_n$ die Fibonacci-Zahlen sind (vgl. Aufgabe 26). Leiten Sie dazu eine Rekursion für $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$ her und verwenden Sie Aufgabe 17 sowie die Eulersche Formel für den Konvergenzradius. Zeigen Sie ferner, dass für $|z| < R$ die Identität

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

gilt.

**Abgabe:** Fr., 17.06.2016, 10:25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 22.06.2016 und Do., 23.06.2016