Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
17.06.2016
Blatt 9

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

**33.** Verifizieren Sie die folgenden Reihendarstellungen:

(a) $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)!} = e$ , (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$ , (c) $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{1}{e}$ .

(Für die Teile (a) und (c) fasse man jeweils zwei aufeinanderfolgende Summanden in der Exponentialreihe zusammen, bei (b) handelt es sich um eine Teleskopreihe.) Für die Reihe in (a) zeige man auch die Restgliedabschätzung

$$e = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{(2k-1)!} + r_{2N} \qquad \text{mit} \qquad 0 < r_{2N} \leq \frac{2}{(2N)!}$$

.

Für welches $N$ ergibt sich $2,71\overline{6} < e \leq 2,719\overline{4}$ ?

**34.** Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$

sind definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z+w) = \cosh(z)\sin h(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

Bitte wenden!

**35.** Es sei $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $c > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Beweisen Sie unter Verwendung der $\varepsilon$-$\delta$-Definition, dass $f$ gleichmäßig stetig ist. Als Anwendung zeige man die gleichmäßige Stetigkeit von

$$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$

*Bemerkung:* Eine Funktion $f$ mit der oben genannten Eigenschaft heißt Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha$.

**36.** Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & : \quad \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}, \\ 0 & : \quad \text{falls } x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

In welchen $x \in (0, 1)$ ist $f$ stetig, in welchen unstetig? Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese.

**Abgabe:** Fr., 24.06.2016, 10:25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 29.06.2016 und Do., 30.06.2016