Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
24.06.2016
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

37. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \dfrac{x^3}{1+x^2}$,

(b) $f : \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 10^6\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z^{27} + 2z^{15} + \exp(z)$,

(c) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \exp(x)$,

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z(1+z)$.

38. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a_\pm \in \mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

39. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

(a) Jedes Polynom der Gestalt

$$P(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat eine reelle Nullstelle, wenn n ungerade ist.

(b) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ besitzt einen Fixpunkt (d. i. eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$).

40. Es seien $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Exponentialfunktion,
$\sin(z) = \dfrac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ und $\cos(z) = \dfrac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$. Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$, so ist $\exp(x) > 1$,

(b) ist $x \in \mathbb{R}$ und $x < 0$, so ist $0 < \exp(x) < 1$,

(c) ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $|\exp(ix)| = 1$,

(d) ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(z) = 0$ oder $\cos(z) = 0$, so ist z reell.

Abgabe: Fr., 01.07.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 06.07.2016 und Do., 07.07.2016