Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
01.07.2016
Blatt 11

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

**41.** Man beweise für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $z + w \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ das Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(z + w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}.$$

Bestimmen und beweisen Sie ein entsprechendes Additionstheorem für den Cotangens. Geben Sie auch an, welche $z, w \in \mathbb{C}$ dabei zulässig sind.

**42.** Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tanh(x) := \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2|x|$,

(c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$,

(d) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arccos(x)$.

**43.** Die Funktionen $f$ und $g$ seien $n$-mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach $n$ beweise man die Identität

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \sin(x)$.

**44.** (a) In der Vorlesung wurde die Darstellung

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ bewiesen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhält man hierfür einen einfacheren Beweis, wenn man von der Identität $1 = \ln'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(\ln(1 + h) - \ln(1))$ ausgeht, darin $h = \frac{x}{n}$ wählt und die Stetigkeit der Exponententialfunktion ausnutzt. Führen Sie die Einzelheiten aus.

(b) Zeigen Sie mit einem ähnlichen Argument wie in Teil (a), dass für $x > 0$ gilt

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n\big(x^{\frac{1}{n}} - 1\big).$$

Starten Sie dazu mit $1 = \exp(0) = \exp'(0)$.

**Abgabe:** Fr., 08.07.2016, 10:25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 13.07.2016 und Do., 14.07.2016