Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
08.07.2016
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

45. Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes oder einer der Folgerungen daraus) für $w > 0$ die Ungleichungen

$$\tanh(w) < w < \sinh(w).$$

Hierbei sind $\sinh(w) = \frac{1}{2}(\exp(w) - \exp(-w))$ und $\tanh(w) = \dfrac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \dfrac{\exp(w) - \exp(-w)}{\exp(w) + \exp(-w)}$ die hyperbolischen Sinus- bzw. Tangensfunktionen. Leiten Sie als Anwendung mit Hilfe der Substitution $w = \ln(\sqrt{\frac{y}{x}})$ für $y > x > 0$ die Ungleichungen zwischen dem geometrischen, logarithmischen und arithmetischen Mittel her, das sind

$$\sqrt{xy} < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y + x}{2}.$$

46. Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Identität

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Verfahren Sie dabei wie bei der Herleitung der Logarithmusreihe.

47. (Regel von de l'Hospital)

(a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x \sin x} - \cos x}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

48. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der folgenden, für alle $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktionen:

(a) $f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \sin^2(x)$,

(b) $f_2(x) = x^n \exp(-x^2)$, hierbei $n \in \mathbb{N}$ fest.

In welchen Fällen liegen globale Extrema vor?

Abgabe: Fr., 15.07.2016, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 20.07.2016 und Do., 21.07.2016