Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
P. D. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2016
17.06.2016
Tutoriumsaufgaben

TUTORIUM ZUR ANALYSIS I

Die *Cantor'sche Nullmenge* ist definiert als $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$, wobei die Mengenfolge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$C_0 := [0,1], \qquad C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$$

festgelegt wird. (Für $A \subset \mathbb{R}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist hierbei $\lambda A + \mu = \{\lambda x + \mu : x \in A\}$.)

1. (5+1+2+3 P.) Zeigen Sie:

(a) $C_n = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0,1,2\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } a_1, \ldots, a_n \neq 1 \right\}$;

(b) $C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0,2\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\}$;

(c) die Ziffernfolge in der triadischen Darstellung einer Zahl $x \in C$ ist eindeutig bestimmt, d.h.: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k} \in C$, so gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$;

(d) C ist überabzählbar.

2. (6 P.) Skizzieren Sie C_1, C_2, gegebenenfalls noch C_3, und zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele Intervalle $I_1, \ldots, I_N$, so dass

(a) $C \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ und

(b) $\sum_{j=1}^{N} |I_j| < \varepsilon$.

(Hierbei ist $|I_j|$ die Länge des Intervalls I_j. - Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der genannten Eigenschaft wird als eine *Nullmenge* - im Sinne von *Jordan* - bezeichnet.)

Bitte wenden!

Die *Cantor-Lebesgue*-Funktion $F : C \to [0,1]$ wird definiert durch

$$F\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}\Big) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} 2^{-k}.$$

3. (4+2+2 P.) Zeigen Sie:

(a) F ist surjektiv. (Ist F auch injektiv?)

(b) F ist monoton steigend.

(c) F ist Hölder-stetig zum Exponeneten $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ $\quad(\approx 0,63093)$.

Hinweis zu (b) und (c): Sind $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \in C$ und $x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a}_k 3^{-k} \in C$ mit $x_1 < x_2$, so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_k = \widetilde{a}_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, k_0 - 1\}$ und $a_{k_0} < \widetilde{a}_{k_0}$. Für (b) zeige man, dass in dieser Situation $\widetilde{a}_{k_0} = 2$ und $a_{k_0} = 0$ sein muss, für (c) folgere man weiter, dass $x_2 - x_1 \geq 3^{-k_0}$ gilt.

Abschließende Bemerkungen:

(a) Die Aufgaben zeigen, dass man eine Menge der "Gesamtlänge" Null (genauer: eine Jordan'sche Nullmenge, wie oben definiert) stetig und surjektiv auf ein Intervall positiver Länge abbilden kann.

(b) Die Cantor-Lebesgue-Funktion F kann zu einer stetigen und monotonen Funktion $\widetilde{F} : [0,1] \to [0,1]$ fortgesetzt werden, indem man auf den nicht zu C gehörenden Teilintervallen von $[0,1]$ (also auf $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}), (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}), \ldots$) konstant und stetig interpoliert. Der Graph dieser Fortsetzung $\widetilde{F}$ wird mitunter die "Teufelstreppe" genannt. Versuchen Sie, ihn zu skizzieren!

Abgabe und Besprechung: Fr., 08.07.2016, im Tutorium; um den "Tutoriumsschein" zu erhalten, sind 12 (von 25 erreichbaren) Punkte erforderlich.