3.4 Exponentialreihe und trigonometrische Funktionen

Satz 1: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{absolut.}$$

(Bem.: Diese Reihe wird als Exponentialreihe bezeichnet.)

Bew.: Folgt aus der Eulerschen Formel, da für $a_n = \frac{1}{n!}$

gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$. $\square$

Def.: Die Abbildung $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$ heißt Exponentialfunktion.

Der Zusammenhang zur Eulerschen Zahl $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ wird hergestellt durch den folgenden Satz:

Satz 2: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{z}{n})^n$.

Insbesondere ist $\exp(1) = e$.

Bew.: Wir fixieren $z \in \mathbb{C}$ und schreiben $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

sowie $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$ (binomischer Lehrsatz)

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

so daß

$$\exp(z) - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}\right) \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Nun ist

$$\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

und daher

$$\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\in(0,1) \implies \left(1-\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right)\in(0,1) \qquad (1)$$

sowie, für jedes feste k:

$$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = 0. \qquad (2)$$

Nun wählen wir N so groß, daß $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon$ ist, hierbei sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann folgt mit (1)

$$\left|\exp(z)-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right)\cdot\frac{|z|^k}{k!} + \varepsilon.$$

Beachten wir zusätzlich (2), so ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\exp(z)-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon>0$ und daher

$$\lim_{n\to\infty}\left|\exp(z)-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = 0,\text{ d.h.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z),\text{ wie behauptet.} \qquad \square$$

Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion ist ihre Funktionalgleichung:

<u>Satz 3</u>: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

<u>Bew.</u>: Wir benutzen den binomischen Lehrsatz und das Cauchy-Produkt von Reihen:

$$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \qquad \text{(Def.)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k \qquad \left(\begin{array}{c}\text{bin.}\\ \text{Satz}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \frac{w^k}{k!}$$

Cauchy-Produkt

$$\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \exp(z)\exp(w). \quad \square$$

Folgerungen:

(1) $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(2) $\exp(r) = e^r$ $\forall r \in \mathbb{Q}$ (erlaubt die Schreibweise e^z für $\exp(z)$.)

<u>Bew.</u>: (1) $1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$: $\exp(n) = \exp(\underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}) = (\exp(1))^n = e^n$.

Ferner für $n, m \in \mathbb{N}$: $e^m = \exp(m) = \exp(\frac{m}{n} n) = \exp(\frac{m}{n})^n$

$\Rightarrow$ $e^{m/n} = \sqrt[n]{e^m} = \exp(\frac{m}{n})$ sowie

$$e^{-m/n} = \frac{1}{e^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\exp(\frac{m}{n})} = \exp(-\frac{m}{n}). \qquad \square$$

<u>Satz 4</u>: (Abschätzung für den Reihenrest):

Es ist $\exp(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + r_{n+1}(z)$, wobei für

alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{n}{2}$ gilt $|r_{n+1}(z)| \leq \frac{2}{(n+1)!} |z|^{n+1}$.

<u>Bew.</u>: Wir haben

$$|r_{n+1}(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} z^{k-(n+1)} \right|$$

$$\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1+k)!} \cdot z^k \right|$$

Nun ist $|z|^k \underset{\text{Vor.}}{\leq} (1 + \frac{n}{2})^k = \frac{1}{2^k}(n+2)^k$ und daher

$$\frac{(n+1)!}{(n+1+k)!} |z|^k \leq \frac{1}{2^k} \frac{(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+2)}{(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k+1)} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Hieraus folgt $|r_{n+1}(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{(n+1)!} |z|^{n+1}$,

wie behauptet. □

<u>Folgerung</u>: e ist irrational.

Ann.: $e = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (wissen ja bereits, dass $2 < e < 3$, also $e \notin \mathbb{N}$ ist!)

$\Rightarrow n! \cdot e = (n-1)! \cdot m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{n! \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{\leq \frac{2}{(n+1)!} \cdot n! \,\leq\, \frac{2}{n+1} \,\leq\, \frac{2}{3} \,<\, 1} \in \mathbb{N}.$$

Widerspruch!

Mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren wir jetzt die trigonometrischen Funktionen:

Def.: Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$$

der Cosinus und

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$

der Sinus von z.

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ (Eulersche Formel),

(2) $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot z^{2k}$,

(3) $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$.

Insbesondere ist $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(z) = -\sin(-z)$.

Bew.: (1) $\cos(z) + i\sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = e^{iz}$.

(2) $\frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((iz)^k + (-iz)^k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{1}{k!}((iz)^k + (-iz)^k) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$$

$$\underset{k=2\ell}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2\ell}}{(2\ell)!} \underset{\ell \rightsquigarrow k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

(3) analog. Folgerung klar. $\square$
↪ zur Übung empfohlen!

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergeben sich die folgenden Additionstheoreme:

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

(2) $\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$.

Bew.: Mit Satz 3 und der Eulerschen Formel erhalten wir

$$\exp(i(z+w)) = \exp(iz)\exp(iw) = (\cos(z)+i\sin(z))(\cos(w)+i\sin(w))$$

$$= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$+ i(\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w))$$

Ersetzt man z und w durch $-z$ und $-w$ und beachtet $\cos(z) = \cos(-z)$, $\sin(z) = -\sin(-z)$ folgt

$$\exp(-i(z+w)) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$- i(\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)).$$

Addition beider Gleichungen ergibt (1), Subtraktion (2). $\square$

Folgerung: Für $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ (Pythagoras)

(2) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$, (3) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

Bew. (1). $1 = \exp(iz)\exp(-iz) \underset{\text{Euler}}{=} (\cos(z)+i\sin(z))(\cos(z)-i\sin(z))$

$= \cos^2(z) + \sin^2(z)$.

(2) u. (3): $w = z$ in Satz 6. $\square$