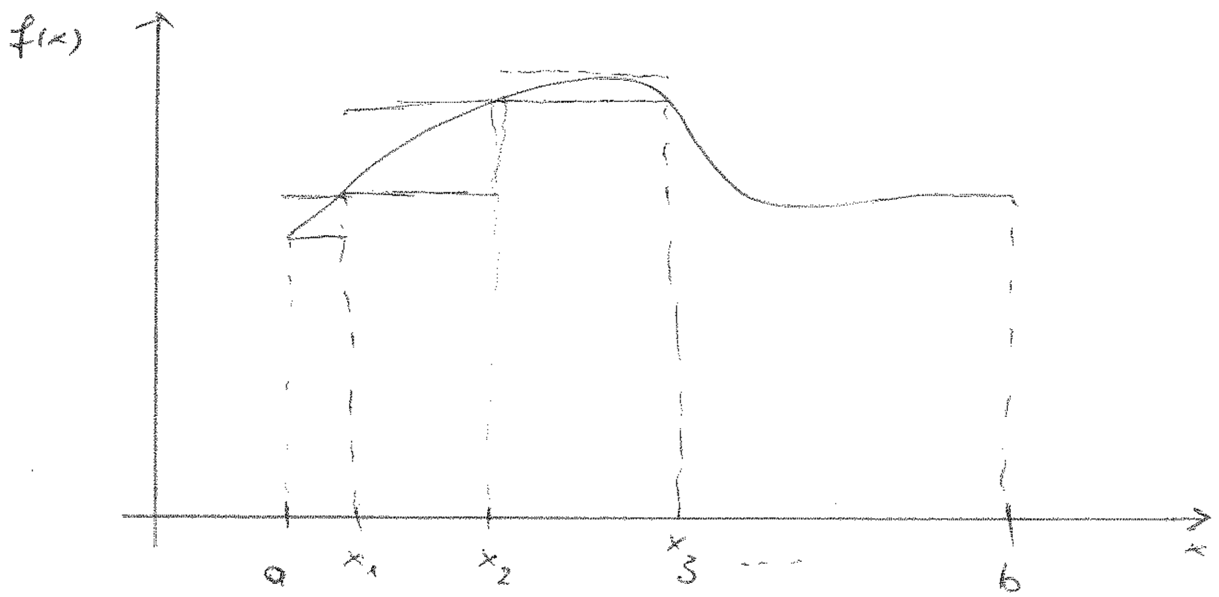
6. Integration

6.1 Das Riemann-Integral: Definition und einfache Eigenschaften

Gegeben (allg. Vor.): Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Ziel: Berechnung der Fläche zwischen x-Achse und deren Graphen $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$.

Idee: Approximation durch Rechteckflächen von oben und unten



Betrachte dazu Zerlegungen $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ von $[a,b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$, so daß $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{p} [x_{i-1}, x_i]$

- $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ heißt feiner als $Z' = \{y_0, \dots, y_q\}$, wenn $Z' \subset Z$
- $Z + Z' := \{x_0, \dots, x_p\} \cup \{y_0, \dots, y_q\} = \{z_0, \dots, z_r\}$ mit $a = z_0 < \dots < z_r = b$ heißt gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'.

Def. (Ober- und Untersummen): Die Summen

$$S(f,Z) := \sum_{k=1}^{p} M_k(x_k - x_{k-1})\ ;\quad M_k := \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

und

$$s(f,Z) := \sum_{k=1}^{p} m_k(x_k - x_{k-1})\ ;\quad m_k := \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

heißen (Riemannsche) Ober- bzw. Untersummen von f bezüglich der Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$.

Bem. (1) Mit $m = \inf\{f(x) : a \le x \le b\}$ und $M = \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$ gilt

$$m(b-a) = \sum_{k=1}^{p} m(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{p} m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\le \sum_{k=1}^{p} M_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{p} M(x_k - x_{k-1}) = M(b-a),$$

also $m(b-a) \le s(f,Z) \le S(f,Z) \le M(b-a)$.

(2) $s(f,Z) = -S(-f,Z)$, denn

$$\sum_{k=1}^{p} \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{p} -\sup\{-f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}(x_k - x_{k-1}).$$

Als Maß für die Feinheit einer Zerlegung definieren wir:

Def.: Für $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ heißt $\delta(Z) := \max_{k=1}^{p} \{x_k - x_{k-1}\}$ die <u>Feinheit</u> der Zerlegung Z.

<u>Lemma 1</u>: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a,b]$. $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ und $Z' = \{y_0, \dots, y_q\}$ seien Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gelten

$$(1) \quad s(f, Z) \le s(f, Z+Z') \le s(f,Z) + 2K(q-1)\cdot\delta(Z)$$

$$(2) \quad S(f, Z) \ge S(f, Z+Z') \ge S(f,Z) - 2K(q-1)\delta(Z)$$

<u>Bew.</u>: Wg. $s(f,Z) = -S(-f,Z)$ gilt $(1) \Leftrightarrow (2)$, es reicht also, (1) zu zeigen. Hierzu betrachten wir den Fall $q = 2$, also $Z' = \{y_0, y_1, y_2\}$. Dann ex. ein $k_0 \in \{1, \dots, p\}$ mit $x_{k_0-1} \le y_1 \le x_{k_0}$.

$$\Rightarrow s(f,Z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne k_0}}^{p} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_{k_0}(x_{k_0} - x_{k_0-1}), \text{ wobei}$$

$$m_{k_0}(x_{k_0} - x_{k_0-1}) \le m_{k'}(y_1 - x_{k_0-1}) + m_{k''}(x_{k_0} - y_1)$$

mit $m_{k'} = \inf\{f(x) : x_{k_0-1} \le x \le y_1\}$ $(\ge m_{k_0})$

und $m_{k''} = \inf\{f(x) : y_1 \le x \le x_{k_0}\}$ $(\ge m_{k_0})$.

Also:
$$s(f,Z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne k_0}}^{p} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_{k'}(y_1 - x_{k_0-1}) + m_{k''}(x_k - y_1) = s(f, Z+Z')$$

$$\le s(f,Z) + (m_{k'} - m_{k_0})(y_1 - x_{k_0-1}) + (m_{k''} - m_{k_0})(x_k - y_1)$$

$$\le s(f,Z) + 2K\cdot\delta(Z).$$

□

Folgerung: Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme, da $s(f,Z) \le s(f,Z+Z') \le S(f,Z+Z') \le S(f,Z')$.

Def.: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißen

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_Z s(f,Z)$$

das untere und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_Z S(f,Z)$$

das obere Riemann-Integral von f über $[a,b]$.

Bem.: Stets gelten $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\overline{\int_a^b} -f(x)\,dx$. (Da $s(f,Z) \le S(f,Z')$ und $s(f,Z) = -S(-f,Z)$.)

Def. (Riemann-Integrierbarkeit, Darboux 1875) Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. In diesem Fall nennen wir $\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ das (Riemann-)Integral von f über $[a,b]$.

Bez.:
- a untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a,b]$ Integrationsintervall,
- f Integrand,
- x Integrationsvariable (beliebig $\neq a,b$).

Der nächste Schritt besteht darin, daß Integral einer Funktion f über $[a,b]$ als Grenzwert von Folgen darzustellen. Dazu definieren wir:

Def.: Eine Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen eines Intervalls $[a,b]$ heißt <u>ausgezeichnet</u> oder eine <u>Zerlegungsnullfolge</u>, wenn $\lim_{n\to\infty} \delta(Z_n) = 0$.

<u>Satz</u> 1: ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, und (Z_n) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, so gelten

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} s(f,Z_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

und

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} S(f,Z_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Bew.</u>: Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist

$$s(f,Z_n) \le \sup_Z s(f,Z) = \int_a^b f(x)\,dx$$

und damit auch

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} s(f,Z_n) \le \limsup_{n\to\infty} s(f,Z_n) \le \int_a^b f(x)\,dx.$$

Andererseits gilt nach Lemma 1 für jede Zerlegung Z von $[a,b]$: $\quad s(f,Z) \le s(f,Z+Z_n) \le s(f,Z_n) + 2K(q-1)\delta(Z_n)$

wobei $|f(x)| \le K$ ist und $q+1$ die Anzahl der Zerlegungspunkte von Z. Für $n\to\infty$ ergibt sich

$$s(f,Z) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(S(f,Z_n) + 2K(q-1)\delta(Z_n)\right) = \alpha .$$

Bilden wir jetzt das Supremum über alle Zerlegungen, erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} S(f,Z_n) \leq \limsup_{n\to\infty} S(f,Z_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx ,$$

also $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,Z_n)$. $\Rightarrow$ (1)

(2) $\Leftarrow$ (1) wg. $s(f,Z) = -S(-f,Z)$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b -f(x)$

$\square$

Folgerung: (1) Sind (Z_n), (Z_n') ausgezeichnete Zerlegungsfolgen, so daß $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(f,Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,Z_n') = J$, so ist f integrierbar und $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = J$.

(2) Ist f integrierbar, so gilt für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (Z_n), daß

$$\lim_{n\to\infty} s(f,Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,Z_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Def. (Zwischensummen) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $Z=\{x_0,\dots,x_p\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_p)$ ein p-Tupel von Zwischenstellen, d.h.:

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq x_{p-1} \leq \xi_p \leq x_p = b .$$

Dann heißt $\displaystyle\sigma(f,Z,\xi) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

die Riemannsche (Zwischen)summe von f bezüglich der Zerlegung Z und der Auswahl ξ der Zwischenstellen.

Lemma 2: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $(Z_n)_n$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge und $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_p^{(n)})$ eine Folge von (p-Tupeln) von Zwischenstellen.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Bew. Wir haben $s(f, Z_n) \le \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) \le S(f, Z_n)$ und $\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = \int_a^b f(x)\,dx$ nach der Folgerung (2) aus Satz 1. Daher ergibt sich die Behauptung mit dem 'Sandwich-Theorem'. □

Zum Beweis der Umkehrung dieser Aussage zeigen wir

Lemma 3: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ p-Tupel ξ und η von Zwischenstellen, so daß

$$s(f, Z) \le \sigma(f, Z, \xi) \le s(f, Z) + \varepsilon \quad \text{und}$$

$$S(f, Z) \ge \sigma(f, Z, \eta) \ge S(f, Z) - \varepsilon .$$

Bew.: Zu $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$ ex. $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $m_k \le f(\xi_k) \le m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Für $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ mit diesen ξ_k ist dann

$$s(f, Z) = \sum_{k=1}^{p} m_k (x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sigma(f, Z, \xi)$$

$$\le \sum_{k=1}^{p} \left(m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) = s(f, Z) + \varepsilon .$$

(Entsprechend für die Obersummen.) □

<u>Satz 2</u>: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, wenn für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_n)_n$ und für jede Wahl $(\xi^{(n)})$ der Zwischenstellen die Folge

$$\left(\sigma(f, Z_n, \xi^{(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

der Riemann-Summen konvergiert. Ist dies der Fall, haben alle Summenfolgen denselben Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Bew.</u>: Entsprechend Lemma 3 wählen wir $(\xi^{(n)})_n$ und $(\eta^{(n)})$ mit

$$s(f, Z^n) \le \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) \le s(f, Z_n) + \frac{1}{n}$$

und $$S(f, Z^n) \ge \sigma(f, Z_n, \eta^{(n)}) \ge S(f, Z_n) - \frac{1}{n}.$$

Nach dem Sandwich-Theorem gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \eta^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad (\text{Satz 1!}).$$

Nun konvergiert nach Voraussetzung auch die Zwischensummenfolge $(\sigma(f, Z_1, \xi^{(1)}), \sigma(f, Z_1, \eta^{(1)}), \sigma(f, Z_2, \xi^{(2)}), \sigma(f, Z_2, \eta^{(2)}), \dots)$, woraus $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ folgt. Also ist f integrierbar. Der Zusatz folgt jetzt aus Lemma 2.

$\square$

Bem.: Die Bedingung in Satz 2 wurde von Riemann (in seiner Habilitationsschrift von 1854) als definierende Eigenschaft der Integrierbarkeit genannt. Ähnliche Summen (genauer: Links-Summen) findet man bereits 1823 bei Cauchy, der allerdings die Stetigkeit des Integranden voraussetzt. Die eigentliche Leistung Riemanns war es, die Klasse der integrierbaren Funktionen einzuführen und aufzuzeigen, daß sie sehr viel größer ist als die der stetigen Funktionen.

Die Riemannsche Auffassung des Integrals als Grenzwert von Zwischensummen führt unmittelbar auf:

<u>Satz</u> 3 (Linearität des Integrals): Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda f + \mu g$ auf $[a,b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx .$$

<u>Bew.</u>: Folgt aus

$$\sigma(\lambda f + \mu g, Z_n, \xi^{(n)}) = \lambda \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) + \mu \sigma(g, Z_n, \xi^{(n)})$$

durch Grenzübergang. $\square$

Die Linearität des Integrals für reellwertige Funktionen legt folgende Def. für komplexwertige Funktionen nahe:

Def.: Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ beschränkt, $g=\operatorname{Re} f$ und $h=\operatorname{Im} f$ seien integrierbar. Dann heißt f integrierbar und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx .$$

Folgerung (aus Satz 3 und dieser Def.): Sind $f_{1,2}:[a,b]\to\mathbb{C}$ integrierbar und $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, so ist auch $\lambda f_1+\mu f_2$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \lambda f_1(x)+\mu f_2(x)\,dx = \lambda\int_a^b f_1(x)\,dx + \mu\int_a^b f_2(x)\,dx .$$

Satz 4 (Monotonie des Integrals) Es seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar und $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx .$$

Bew.: Für die Zwischensummen einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge (Z_n) gilt

$$\sigma(f,Z_n,\xi^{(n)}) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})$$

$$\le \sum_{k=1}^{p} g(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}) = \sigma(g,Z_n,\xi^{(n)}),$$

und diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang $n\to\infty$ erhalten. $\square$