

Übungen zu Analysis I

46. (8 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\log(1+x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

47. (7 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ce^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

48. (15 Punkte) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$
 Fertigen Sie Skizzen von f_0 , f_1 und f_2 an und zeigen Sie:

(a) f_0 ist in 0 nicht stetig.

(b) f_1 ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

(c) f_2 ist differenzierbar, aber f_2' ist in 0 nicht stetig.

(d) Ist $f(x) := f_2(x)^2$, so hat f ein lokales Minimum an der Stelle 0, aber für jedes $\varepsilon > 0$ ist f im Intervall $]0, \varepsilon[$ nicht monoton wachsend und im Intervall $] - \varepsilon, 0[$ nicht monoton fallend.

49. (10 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) > 0$, so gibt es ein offenes Intervall I , das x_0 enthält und auf dem f monoton wachsend ist.

(b) Sei $f(x) := \frac{1}{2}x + f_2(x)$, wobei f_2 wie in Aufgabe 43 ist. Dann ist $f'(0) = \frac{1}{2}$, aber es gibt kein offenes Intervall I , das 0 enthält und auf dem f monoton wachsend ist.

Abgabe: Dienstag, den 26. Januar 2010, 11:10 Uhr