Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2009/2010
24. November 2009
Blatt 6

Übungen zu Analysis I

22. (10 Punkte)

    (a) Berechnen Sie alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $n \leq 8$.

    (b) Sind $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, so definieren wir

    $$\binom{n}{k}_2 := \begin{cases} 0, & \text{falls } \binom{n}{k} \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } \binom{n}{k} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

    Berechnen Sie $\binom{n}{k}_2$ für $n \leq 16$.

    (c) Sei k eine feste natürliche Zahl. Was ist

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}?$$

23. (12 Punkte) Folgern Sie aus dem Binomischen Lehrsatz: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} k = n2^{2n-1}.$$

24. (10 Punkte) Zeigen Sie die de Morganschen Regeln, d. h.:
Ist X eine Menge und sind $A, B \subseteq X$, so ist

$$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B),$$
$$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B).$$

25. (8 Punkte) In der Vorlesung wurde angedeutet, dass es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt. Führen Sie dies im Detail aus.

Abgabe: Dienstag, den 01. Dezember 2009, 11:10 Uhr
Besprechung: 9./10. Dezember 2009