

Übungen zu Analysis I

30. (12 Punkte) Zeigen Sie mittels der Definition der Stetigkeit (also mit ε und δ), dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sind:

- (a) $f(z) = 12 \cdot z$
- (b) $f(z) = z^2$
- (c) $f(z) = |z - i|$

31. (16 Punkte)

- (a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge (x_n) gibt mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiert.
- (b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge (x_n) gibt mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiert.
- (c) Definiere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f an keiner Stelle stetig ist.

- (d) Definiere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

An welchen Stellen ist g stetig?

32. (12 Punkte) Wie am Anfang von § 6 der Vorlesung definieren wir eine Addition und eine Multiplikation auf \mathbb{R}^2 durch

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Abgabe: Dienstag, den 15. Dezember 2009, 11:10 Uhr