Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2009/2010
15. Dezember 2009
Blatt 9

Übungen zu Analysis I

33. (8 Punkte) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil aller komplexen Zahlen z, für die gilt:

    (a) $\frac{1}{z} = 3 + 4\mathrm{i}$

    (b) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$

    (c) $z^3 = 8$

    (d) $z^3 = -8$

34. (12 Punkte) Fertigen Sie Skizzen der folgenden Mengen an (eine Rechnung ist nicht erforderlich):

    (a) $\{z \in \mathbb{C} |\ \overline{z} = -z\}$

    (b) $\{z \in \mathbb{C} |\ z \neq 0 \text{ und } \overline{z} = z^{-1}\}$

    (c) $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - i - 1| = |z - i + 1|\}$

    (d) $\{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$

    (e) $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - i| < 1\}$

    (f) $\{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}(z^2) > 0\}$

35. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle rellen Zahlen x, y gilt:

    (a) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

    (b) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

    (c) $\sin(x + \pi) = -\sin x$

    (d) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

    (e) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

    (f) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

    (g) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    (h) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

    (i) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

    (j) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

Bitte wenden!

36. (10 Punkte) Man definiert Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ und beweisen Sie Additionstheoreme für cosh und sinh.

   (b) Skizzieren Sie die Graphen der durch $x \mapsto \cosh x$ und $x \mapsto \sinh x$ definierten Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Abgabe: Dienstag, den 22. Dezember 2009, 11:10 Uhr