Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12
20.12.2011
Blatt 10

Übungen zu Analysis I

1. (10P) Es sei $f\colon [-1,2]$ gegeben durch $f(x) = x$. Verwenden Sie die Definition des Riemann-Integrals, um zu zeigen, dass f Riemann-integrierbar ist, und um $\int_{-1}^{2} x\,dx$ zu berechnen.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die folgende Treppenfunktion $\varphi_n \in \mathcal{T}[0,1]$ definiert

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x < 1 - \frac{1}{n}, \\ n, & \text{falls } 1 - \frac{1}{n} \le x < 1, \\ 0, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

   (a) (5P) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx.$$

   (b) (5P) Bestimmen Sie für jedes $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ für $x \neq 1$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
   (a) (2P) Bringen Sie $p(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$ für $x \neq 1$ in eine geschlossene Form.
   (b) (3P) Leiten Sie $p(x)$ sowohl in der geschlossenen Form als auch in der Darstellung als Summe ab.
   (c) (3P) Verwenden Sie das Ergebnis aus (b), um $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ für $x \neq 1$ zu bestimmen.
   (d) (2P) Überprüfen Sie die in (c) gewonnene Formel an den Punkten $x = 0$ und $x = -1$. Betrachten Sie dazu für $x = -1$ gerade und ungerade n getrennt!

4. Es sei $I = (a,b)$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie:
   (a) (1P) Für jedes $C \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto Ce^x$, die Gleichung $f' = f$.
   (b) (9P) Es gibt keine weiteren Funktionen $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $f' = f$.

Frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2012!

Abgabe: Dienstag, 10.1.2012, 10:15 Uhr. **Besprechung:** 18. und 19. Januar