Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12
17.01.2012
Blatt 12

Übungen zu Analysis I

1. (Je 2P) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

   (a) $\displaystyle\int \frac{3x}{9+4x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{9+4x^2}dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-3)^2}dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}dx$

   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

2. (Je 2P) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{2n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} z^n.$

3. (10 P) In Beispiel 12.25 wurde gezeigt, dass der Konvergenzradius von

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{4n}$$

   gleich $\sqrt[4]{2}$ ist. Zeigen Sie, dass f eine rationale Funktion ist, und bestimmen Sie die Nullstellen des Nenners von f. Welchen Abstand haben die Nullstellen vom Ursprung?

4. Die Differentialgleichung $f''(x) = xf(x)$ ist die *Airy*sche Differentialgleichung. Definieren Sie rekursiv: $a_0 = 1$ und $a_{j+1} = (1+3j)a_j$ für $j \in \mathbb{N}_0$, und setzen Sie

   $$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{(3j)!} z^{3j}.$$

   (a) (3P) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich ∞ ist.
   (b) (7P) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}$ die Airysche Differentialgleichung löst.

Abgabe: Dienstag, 24.1.2012, 10:15 Uhr. **Besprechung:** 1. und 2. Februar