Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12
15.11.2011
Blatt 5

Übungen zu Analysis I

1. (Je 3P) Welche der folgenden Reihen konvergieren? Begründen Sie Ihre Aussage.

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - n^2}{(2^n+1)(2^n-1)}$$ (b) $$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-5)^5}$$

   (c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + n^2}{n2^n}$$ (d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n+1) - n\sqrt{n+1}}{n^2+n}$$

   Hinweis: Den Wert der letzten Reihe kann man sogar ausrechnen.

2. (a) (5P) Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an mit $b - a \leq \frac{1}{10}$ und $e \in [a, b]$, indem Sie die Abschätzung aus Satz 6.10 verwenden.
   (b) (5P) Geben Sie $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ an mit
   $$\left| e - \sum_{n=0}^{N_j} \frac{1}{n!} \right| < \frac{1}{10^j}, j = 2, 3.$$
   Hinweis: Die Zahlen N_2 und N_3 brauchen nicht optimal gewählt zu werden. Es muss aber gezeigt werden, dass sie die behauptete Eigenschaft besitzen.

3. Die "Floor"-Funktion ist definiert durch
   $$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}.$$
   Die Funktion f sei definiert durch
   $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \cdot x^2, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$
   (a) (5P) Zeigen Sie, dass f in allen Punkten der Form $x_0 = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, unstetig ist.
   (b) (5P) Zeigen Sie, dass f stetig in $x_0 = 0$ ist.

4. (8P) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition (also ohne Satz 6.7 und Satz 6.12), dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x^3 - x|$, stetig in $x_0 = 0$ ist.

Abgabe: Dienstag, 22.11.2011, 10:15 Uhr. **Besprechung:** 30.11. und 1.12.