Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. R. W. BRAUN

WS 2011/12
22.11.2011
Blatt 6

Übungen zu Analysis I

1. Gegeben seien die Funktionen
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 16x^2$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{für } x \geq 1, \\ |2x| - 1, & \text{für } x < 1. \end{cases}$$
Bestimmen für $A = [-1, 2]$ und $B = (-\infty, 4)$ die folgenden Mengen:
(a) (2P) $f(A)$,
(b) (3P) $g(A)$,
(c) (2P) $f^{-1}(B)$,
(d) (3P) $g^{-1}(B)$.

2. Es sei $I = [a, b]$ mit $a < b$, und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.
(a) (5P) Es gelte $f(I) \subset I$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.
(b) (5P) Es gelte $I \subset f(I)$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.
Hinweis: Betrachten Sie für beide Aufgabenteile die Funktion g mit $g(x) = f(x) - x$.

3. (Cauchysches Kondensationskriterium)
(a) (6P) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone fallende Nullfolge positiver Zahlen. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.
Hinweis: Für die eine der beiden Richtungen verwendet man dasselbe Beweisverfahren wie beim Nachweis der Divergenz der harmonischen Reihe.
(b) (4P) Verwenden Sie Teil (a), um festzustellen, ob die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
konvergiert.

4. Fertigen Sie Skizzen der folgenden Mengen an:

(a) (1P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 5\}$	(b) (1P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = -z\}$
(b) (1P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z\}$	(d) (1P)	$\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \overline{z} = \frac{1}{z}\right\}$
(e) (1P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$	(f) (1P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z - i\rvert < 1\}$
(g) (2P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^2 > 0\}$	(h) (2P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z^2 > 0\}$

Abgabe: Dienstag, 29.11.2011, 10:15 Uhr. **Besprechung:** 7. und 8. Dezember