Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12
06.12.2011
Blatt 8

# Übungen zu Analysis I

1. (Je 3P) Stellen Sie für die folgenden Paare $(f, g)$ von Funktionen jeweils fest, welche der Aussagen $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = o(f(x))$ bzw. $g(x) = O(f(x))$ für $x \to \infty$ gelten.

   (a) $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = x$,

   (b) $f(x) = e^x$, $\quad g(x) = e^{\sqrt{x}}$,

   (c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $\quad g(x) = x^3$,

   (d) $f(x) = e^{\log^2(x)}$, $\quad g(x) = x^2$.

2. (a) (2P) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es genau die folgenden 6 sechsten Einheitswurzeln gibt
$$1, \quad -1, \quad e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad e^{\frac{5i\pi}{3}}.$$
Außerdem ist aus Aufgabe 1 von Blatt 7 bekannt, dass $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ebenfalls eine sechste Einheitswurzel ist. Um welche der angegebenen Einheitswurzeln handelt es sich?

   (b) (3P) Benutzen Sie das Ergebnis aus (a), um $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{6}$ und $\cos\frac{\pi}{3}$ zu bestimmen.
   *Hinweis:* $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

   (c) (5P) Zeigen Sie analog
$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$
indem Sie von achten Einheitswurzeln ausgehen.

3. (Je 2P) Bestimmen Sie die Ableitungen von

   (a) $f(x) = \cos(2x + 3)$, $\quad$ (b) $f(x) = \exp(e^x)$,

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

4. (10P) Mit $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien wie in Aufgabe 3 von Blatt 7 die Hyperbelfunktionen bezeichnet. Bestimmen Sie ihre Ableitungen und drücken Sie sie durch Hyperbelfunktionen aus.

**Abgabe:** Dienstag, 13.12.2011, 10:15 Uhr. **Besprechung:** 21. und 22. Dezember