Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12

Klausuraufgaben zu Analysis I

1. (a) (4P) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $(i-1)^3$ und $(i-1)^4$.
   (b) (6P) Für welche reellen Zahlen a ist $(a+i)^3$ reell?

2. (10P) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2+1}{3n^2} - \dfrac{n^3}{3n^2+1}$.

3. Sei $I = [-2, 3]$, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12.$$
   (a) (1P) Begründen Sie, warum f in I ein Maximum und ein Minimum besitzt.
   (b) (5P) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum.
   (c) (4P) Geben Sie die Bildmengen $f(I)$ und $f([0,3])$ an.

4. (a) (7P) Bestimmen Sie für $a > 0$ und $R > 0$ das Integral
$$\int_e^R \frac{1}{x\,(\log(x))^a}dx.$$
   (b) (3P) Für welche a existiert
$$\lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{1}{x(\log(x))^a}dx$$

5. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen
   (a) (5P)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{9^n} z^n$$
   (b) (5P)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \left(\frac{z}{3}\right)^{2n}$$

6. (10P) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^2, & \text{falls } x \geq 1, \\ 1 - (x-1)^2, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$
   Zeigen Sie durch Betrachtung des Differentialquotienten, dass f differenzierbar in 1 ist.