Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12
31.01.2012

Präsenzübungen zu Analysis I

1. Beweisen Sie die Stetigkeit von
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2},$$
in $x_0 = 0$ nur mit Hilfe der ε-δ-Definition.

2. Bestimmen Sie sämtliche Werte von $a > 0$, für welche die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$$
konvergiert. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

3. Gegeben sei die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \cos(x^2), & \text{für } x \geq 0, \\ \cos(x), & \text{für } x < 0. \end{cases}$$
   (a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
   (b) Zeigen Sie $f \in C^1(\mathbb{R})$.
   (c) Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$?
   (d) Ist $f \in C^3(\mathbb{R})$?

4. Berechnen Sie für $a \geq 1$ das unbestimmte Integral
$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + a}.$$

5. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sin(x) = \frac{x}{3}$ mindestens eine reelle Lösung $x \neq 0$ hat.

Abgabe: keine Abgabe **Besprechung:** 03.02.2012