Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. R. W. Braun

WS 2011/12
19. und 20. Okt

Präsenzübungen zu Analysis I

1. Finden Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgenden Mengen, falls sie existieren:

   a) $\left\{2-\frac{1}{n} \,\middle|\, n \text{ gerade}\right\}$ b) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

   c) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0\right\}$ d) $\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

   e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2+2x-1<0\right\}$

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$,

   (b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$,

3. Finden Sie den Fehler im Beweis des folgenden Satzes:

   Satz: *Alle Katzen sind grau.*

   Beweis. Wir zeigen zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Zwischenbehauptung:
   Wenn eine Menge M von n Katzen mindestens eine graue Katze enthält, dann sind alle Katzen in M grau.
   Wir zeigen die Zwischenbehauptung mit vollständiger Induktion nach n.
   $n = 1$: Das ist klar.
   $n \to n+1$. Sei M eine Menge von $n+1$ Katzen, welche mindestens eine graue Katze g enthält. Wir schreiben M als Vereinigung $M = M_1 \cup M_2$, wobei M_1 und M_2 beide jeweils n Katzen enthalten. Die Mengen M_1 und M_2 sind keineswegs eindeutig, wir können sie aber so einrichten, dass $g \in M_1$ und $g \in M_2$. Daher kann die Induktionsvoraussetzung auf beide Mengen angewandt werden. Also enthalten sowohl M_1 als auch M_2 nur graue Katzen, und die Zwischenbehauptung ist gezeigt.
   Das es mindestens eine graue Katze gibt, beispielsweise die von meinem Nachbarn, enthält die Menge aller Katzen eine graue Katze. Folglich enthält die Menge aller Katzen nur graue Katzen. □